INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XIX. BAND DRITTES HEFT 1951

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 12.–

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule
Professor **K. v. Sanden,** Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 44 46

Vertriebsvertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Montag, H., Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit gleichförmig am Rand belastetem quadratischen Loch. Mit 6 Textabbildungen 155

Weidenhammer, F., Der eingespannte, achsial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem. Mit 15 Textabbildungen 162

Kaufmann, W., Über den Mechanismus der Wirbelkerne einer Kármánschen Wirbelstraße. Mit 2 Textabbildungen 192

Woinowsky-Krieger, S., Über die Beulsicherheit von Rechteckplatten mit querverschieblichen Rändern. Mit 6 Textabbildungen 200

Melkus, H., Über den abgelösten Verdichtungsstoß. Mit 6 Textabbildungen 208

Zerna, W., Membrantheorie verallgemeinerter Rotationsschalen. Mit 1 Textabbildung 228

INGENIEUR-ARCHIV

XIX. BAND DRITTES HEFT 1951

Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit gleichförmig am Rand belastetem quadratischen Loch *.

Von H. Montag.

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit behandelt das quadratische Loch in einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit doppelsymmetrischer gleichförmiger Randbelastung. Die Grundlagen zu dieser Theorie sind von *Th. Schade*[1] geschaffen worden. Es kann daher darauf verzichtet werden, im einzelnen auf die Entwicklung einzugehen. Es sollen nur die wesentlichen hier benutzten Ergebnisse angegeben werden.

Das Scheibenproblem führt bekannterweise auf die Differentialgleichung

$$\Delta \Delta F = 0$$

mit vorgegebenen Randbedingungen. Aus der Funktion F lassen sich dann die Spannungen berechnen zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Zur Anpassung des Koordinatensystems an die Randbedingung werden die von *R. Grammel*[2] angegebenen erweiterten Kreisfunktionen

$$x = \mathfrak{Cof}\,(n)\, v,$$
$$y = \mathfrak{Sin}\,(n)\, v,$$

die der algebraischen Gleichung $x^n + y^n = 1$ genügen, benutzt.

Mit der Transformation

$$x = \varrho\, \mathfrak{Cof}\,(n)\, v,$$
$$y = \varrho\, \mathfrak{Sin}\,(n)\, v$$

(Abb. 1) erhält man mit dem Separationsansatz zur Lösung der Potentialgleichung $\Delta \Phi = 0$

$$\Phi_\lambda = \varrho^\lambda\, g_\lambda\,(v)$$

die allgemeine Lösung

$$\Phi_\lambda = \varrho^\lambda \left(\mathfrak{Sin}\,(n)^2\, v + \mathfrak{Cof}\,(n)^2\, v\right)^{\lambda/2} \begin{vmatrix}\mathfrak{Sin}\\ \mathfrak{Cof}\end{vmatrix} \operatorname{arc\,tg}\left(\mathfrak{Tg}\,(n)\, v\right)$$

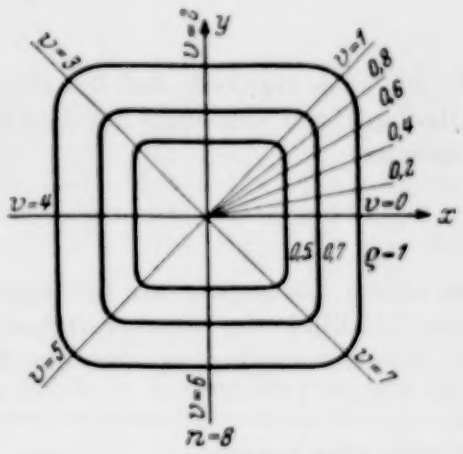

Abb. 1.
$x^n + y^n = \varrho^n$ für $\varrho = 0{,}5;\ 0{,}7;\ 1$.

und mit $n \to \infty$ nach einiger Umformung die bekannten Funktionen

$$\lambda = -\lambda_1 < 0 : \Phi_{-\lambda_1} = \begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\Big| \frac{1}{z^{\lambda_1}},$$

$$\lambda = 0 : \Phi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \qquad \begin{matrix}(z = x + i\,y)\\ (\bar{z} = x - i\,y)\end{matrix}$$

$$\lambda > 0 : \Phi_\lambda = \begin{matrix}Re\\ Jm\end{matrix}\Big| z^\lambda.$$

Die entsprechenden Bipotentialfunktionen Ψ_λ ergeben sich durch Multiplikation der Potentialfunktionen mit $z\bar{z}$. Für das hier vorliegende Problem interessieren nur die Funktionen, die keinen Pol im Unendlichen haben.

2. Spezielle Bedingungen und Lösung der Differentialgleichung. Für das in Abb. 2 schematisch dargestellte Scheibenproblem müssen neben der Singularitätenfreiheit der Funktionen im Außen-

---

* Dissertation Aachen 1949.

[1] *Th. Schade*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 118.

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 188 sowie 18 (1950), S. 250.

bereich des Loches die Spannungen und damit die zweiten Ableitungen der Funktionen im Unendlichen verschwinden. Weiterhin muß die Lösung zu $v = 0; 2; 4; 6$ gerade sein, was man aber durch Zusammensetzen von Teilfunktionen leicht erreichen kann (wie *Th. Schade* in der erwähnten Arbeit gezeigt hat). Man braucht sich dann nur noch um die Lösung im Bereich I zu kümmern und hat dafür zu sorgen, daß die Stetigkeit der zweiten Ableitungen an den Diagonalen erfüllt wird, was auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen nach sich zieht.

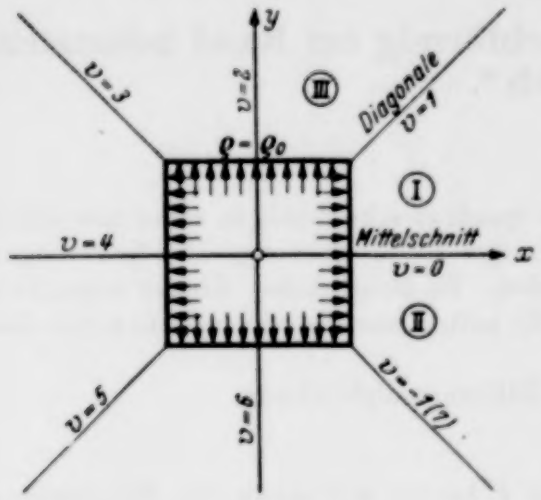

Abb. 2.

Diese Bedingung ist auch physikalisch sofort einzusehen. Die Diagonalen müssen aus Symmetriegründen Hauptspannungstrajektorien sein, was letzten Endes eine Deformationsbedingung darstellt, die aussagt, daß die Diagonallinien gerade bleiben. Das läßt sich aber nur mit der Bedingung $(\sigma_x)_{v-1} = (\sigma_y)_{v-1}$ erreichen, was mit oben Gesagtem identisch ist. Wie man später sehen wird, ist die Erfüllung dieser Bedingung streng nicht möglich, so daß man zu einer Näherung gezwungen ist.

Aus Symmetrieeigenschaften kann man weiterhin fordern, daß $\tau_{xy} = 0$ für $v = 0$ ist.

Alle erwähnten Bedingungen mit Ausnahme der Stetigkeitsbedingung werden von den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Potential- und Bipotentialfunktionen erfüllt, wenn man nur Funktionen zuläßt, die gerade in v sind.

Die Stetigkeitsbedingung soll hier durch eine Gleichgewichtsbedingung für einen Schnitt durch die positive x- und y-Achse verbessert werden. Sie lautet

$$\left(\int_{x_0}^{\infty} \sigma_y \, dx\right)_{y=0} + \left(\int_{0}^{x_0} \sigma_x \, dy\right)_{x=x_0} = 0 \,. \tag{2,1}$$

Es hat sich ergeben, daß bei einem Ansatz für F, der sich aus einer Reihe von Polynomlösungen allein aufbaut, der erste Ausdruck von (2,1) zu Null wurde. Es mußte daher noch die Bipotentialfunktion

$$y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = \varrho \, v \operatorname{arc\,tg} v$$

zu einem Lösungsansatz hinzugenommen werden, welche a priori den angeführten Bedingungen einschließlich der Stetigkeitsbedingung genügt.

Der Lösungsansatz für die Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta F = 0$$

würde also lauten

$$F = b_0 \varrho_0 \varrho \, v \operatorname{arc\,tg} v + \sum_{\lambda=1}^{N} a_\lambda \varrho_0^{\lambda+2} \Phi_{-\lambda} + \sum_{\lambda=2}^{N+1} b_\lambda \Psi_{-\lambda} \,, \tag{2,2}$$

wofür die Randbedingungen zu befriedigen sind

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(\varrho, v) \,, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_0 \tag{2,3}$$

und die Gleichgewichtsbedingung

$$\left(\int_{x_0}^{\infty} \sigma_y \, dx\right)_{y=0} + \left(\int_{0}^{x_0} \sigma_x \, dy\right)_{x=x_0} = 0 \,,$$

oder auch

$$\left(\int_{\varrho_0}^{\infty} \sigma_x \, d\varrho\right)_{v=0} + \left(\int_{0}^{\varrho_0} \sigma_y \, \varrho \, dv\right)_{\varrho=\varrho_0} = 0 \,, \tag{2,4}$$

sowie die zusätzlichen Bedingungen der Stetigkeitsforderung an den Diagonalen. Die Randbedingung (2,3) würde bei einem Koeffizientenvergleich in den v-Potenzen ein Gleichungssystem ergeben, das außerordentlich kompliziert ist und bei einer großen Anzahl von Funktionen eine große Rechenarbeit erfordern würde.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, führt man eine neue Variable V durch die Substitution

$$V = \frac{1}{1+v^2} \tag{2,5}$$

ein. Die sich hiermit ergebenden Potential- und Bipotentialfunktionen sowie ihre Ableitungen, die sich als Linearkombinationen dieser schreiben lassen, sind in der Originalhandschrift tabellarisch zusammengestellt.

Die Randbelastung soll in der Form angenommen werden

$$(\sigma_x)_{\varrho=\varrho_0} = -\sum_{m+1}^{M} A_m V^{m+1}. \tag{2,6}$$

Durch Koeffizientenvergleich in den V-Potenzen erhält man das Koeffizientenschema nach Tabelle 1. Die Auflösung dieses Schemas ist in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 1.

τ_{xy}

b_0	a_1	b_2	a_2	b_3	a_3	b_4	a_4	b_5	a_5	b_6	a_6	b_7	a_7	b_8	a_8	b_9	Rechte Seite
—1	1	4		—3													0
	—2	—4	6	18	—3	—18		5									0
			—8	—16	24	64	—20	—80	5	40		—7					0
					—24	—48	80	200	—90	—300	42	210	—7	—70		9	0
							—8	—16	30	72	—42	—126	28	112	—9	—54	0
									—5	—10	21	49	—35	—98	30	105	0
											—3	—6	14	32	—27	—72	0
													—7	—14	36	81	0
															—1	—2	0

σ_x

1	3	6	—3	—9		3											$-A_1/2$
	—2	—4	12	26	—15	—42	5	25		—5							$-A_2/4$
			—8	—16	40	88	—60	—160	35	130	—7	—49		7			$-A_3/6$
					—24	—48	120	264	—210	—540	168	546	—63	—294	9	81	$-A_4/8$
							—8	—16	42	92	—84	—210	84	252	—45	—174	$-A_5/80$
									—5	—10	28	61	—63	—154	75	213	$-A_6/384$
											—3	—6	18	39	—45	—108	$-A_7/1792$
													—7	—14	45	97	$-A_8/2048$
															—1	—2	O

Tabelle 2.

	$A_1/4$	$A_2/16$	$A_3/96$	$A_4/768$	$A_5/2560$	$A_6/30720$	$A_7/860160$	$A_8/458752$
$b_0 =$	—2	—6	—30	—210	—630	—6930	—180180	—90090
$a_1 =$	2	9	48	345	1050	11655	304920	153153
$b_2 =$	—1	—3	—15	—105	—315	—3465	—90090	—45045
$a_2 =$		—2	—8	—50	—140	—1470	—36960	—18018
$b_3 =$		1	6	45	140	1575	41580	21021
$a_3 =$			—4	—30	—90	—980	—25200	—12474
$b_4 =$			2	20	70	840	23100	12012
$a_4 =$				—12	—48	—588	—16128	—8316
$b_5 =$				6	20	420	12600	6930
$a_5 =$					—16	—280	—8960	—5040
$b_6 =$					8	168	6048	3696
$a_6 =$						—80	—3840	—2592
$b_7 =$						40	2240	1680
$a_7 =$							—960	—1008
$b_8 =$							480	576
$a_8 =$								—224
$b_9 =$								112

Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung (2,4) hat man noch die Integrale

$$\left(\int_{\varrho_0}^{\infty} \sigma_y \, d\varrho\right)_{\varrho=0} \quad \text{und} \quad \left(\int_{0}^{\varrho_0} \sigma_x \, \varrho \, dx\right)_{\varrho=\varrho_0}$$

zu bilden.

Setzt man in (2,2) bzw. (2,6) $N = M$, so zeigt die Rechnung für jedes beliebig $N \geq 1$, daß

$$\left(\int_{\varrho_0}^{\infty} \sigma_y \, d\varrho\right)_{v=0} = -b_0$$

ist. Zur Ausrechnung des zweiten Integrals bedient man sich der Rekursionsformel

$$J_m = \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^m} = \frac{1}{2^m(m-1)} + \frac{2m-3}{2(m+1)} \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^{m-1}} .$$

Tabelle 3.

m	J_m	m	J_m	m	J_m
1	0,7853982	4	0,4746036	7	0,3532164
2	0,6426991	5	0,4230906	8	0,3285447
3	0,5445243	6	0,3839066	9	0,3082548
				10	0,2912381

Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Damit ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (2,4) für

$$N = M = 8$$

die Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten A_i

$$1{,}426991\,A_1 + 1{,}695243\,A_2 + 1{,}621040\,A_3 + 1{,}496531\,A_4 + 1{,}378129\,A_5 + 1{,}276305\,A_6 + 1{,}190725\,A_7 + 1{,}118742\,A_8 = 0 .$$

Weitere Bedingungsgleichungen kann man nun wahlweise zur Annäherung der Belastungsfunktion und als weitere Stetigkeitsbedingungen für die Spannungen an den Diagonalen fordern.

3. Numerische Rechnung. Um die günstigste Näherung zu finden sind mehrere Versuchsrechnungen durchgeführt worden, deren Extrakt hier in Tabelle 4 zusammengefaßt ist.

Der Vollständigkeit halber seien zunächst aber noch die Formeln für die Spannungen an den Diagonallinien, an den Mittellinien und für die Randspannung σ_y ($\varrho = \varrho_0$) für $N = 8$ angegeben werden. Für die Spannungen an den Diagonallinien ergibt sich für $p_0 = 1$ ($N = 8$)

$$(\sigma_x)_{V=1/2} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)\frac{b_0}{2} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 b_2 + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3\left(\frac{a_1}{2} + \frac{5}{2}\,b_3\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4\left(\frac{3}{2}\,a_2 + \frac{3}{2}\,b_4\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^5\left(\frac{3}{2}\,a_3 - \frac{3}{2}\,b_5\right) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^6\frac{15}{4}\,b_6 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^7\left(\frac{15}{8}\,a_5 + \frac{27}{8}\,b_7\right) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^8\left(\frac{21}{8}\,a_6 - \frac{7}{8}\,b_8\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^9\left(-\frac{7}{4}\,a_7 + \frac{7}{4}\,b_9\right),$$

$$(\sigma_y)_{V=1/2} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)\frac{b_0}{2} - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4 b_2 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3\left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_3}{2}\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4\left(-\frac{3}{2}\,a_2 + \frac{3}{2}\,b_4\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^5\left(-\frac{3}{2}\,a_3 + \frac{7}{2}\,b_5\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^6\frac{15}{4}\,b_6 + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^7\left(\frac{15}{8}\,a_5 + \frac{15}{8}\,b_7\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^8\left(\frac{21}{8}\,a_6 - \frac{7}{8}\,b_8\right) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^9\left(\frac{7}{4}\,a - \frac{11}{4}\,b_9\right).$$

Als wertvolles Ergebnis wäre zu erwähnen, daß für jeden Lösungsansatz dieser Art

$$(\sigma_x)_{\substack{V=1/2 \\ \varrho=\varrho_0}} = (\sigma_y)_{\substack{V=1/2 \\ \varrho=\varrho_0}} \tag{3,2}$$

wird (exakte Erfüllung der Spannungsstetigkeitsbedingung in der Ecke). Für die Spannungen an den Mittellinien folgt für $N = 6$

$$(\sigma_x)_{V=1} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)2\,b_0 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4 4\,b_2 - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3(2\,a_1 + 10\,b_3) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4(6\,a_2 + 18\,b_4) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^5(12\,a_3 + 28\,b_5) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^6(20\,a_4 + 40\,b_6) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^7(30\,a_5 + 54\,b_7) - \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^8 42\,a_6 ,$$

$$(\sigma_y)_{V=1} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3(2\,a_1 + 2\,b_3) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^4(6\,a_2 + 6\,b_4) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^5(12\,a_3 + 12\,b_5) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^6(20\,a_4 + 20\,b_4) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^7(30\,a_5 + 30\,b_7) + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^8 42\,a_6 .$$

Die Formel für die Randspannung lautet für $N = 6$

$$(\sigma_y)_{\varrho=\varrho_0} = V(2b_0 + 4b_2) + V^2(-2b_0 - 20b_2 + 42b_3 - 18b_4 - 6a_1 + 6a_3) +$$
$$+ V^3(16b_2 - 136b_3 + 264b_4 - 180b_5 + 40b_6 + 8a_1 - 48a_2 + 60a_3 - 20a_4) +$$
$$+ V^4(96b_3 - 624b_4 + 1280b_5 - 1140b_6 + 462b_7 + 48a_2 - 240a_3 + 360a_4 - 210a_5 + 42a_6) +$$
$$+ V^5(384b_4 - 2368b_5 + 5280b_6 - 5712b_7 + 192a_3 - 960a_4 + 1680a_5 - 1344a_6) +$$
$$+ V^6(1280b_5 - 8000b_6 + 19488b_7 + 640a_4 - 3360a_5 + 6720a_6) +$$
$$+ V^7(3840b_6 - 24960b_7 + 1920a_5 - 10752a_6) +$$
$$+ V^8(10752b_7 + 5376a_6).$$

Tabelle 4. *Tabellarische Übersicht der gerechneten Fälle.*

Fall	Randbedingungen	Bedingungen an den Diagonallinien	Anzahl der Potential- und Bipotentialfunktionen
1	$\sigma_x = -1 \left\{ \begin{matrix} v=0 \\ v=1/2 \\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$	keine	9
2	$\sigma_x = -1 \left\{ \begin{matrix} v=0 \\ v=1/4 \\ v=1/2 \\ v=3/4 \\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$	keine	13
3	$\sigma_x = -1 \left\{ \begin{matrix} v=0 \\ v=1/4 \\ v=1/2 \\ v=3/4 \\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$ $\varrho_0 \int_0^1 \sigma_x \, dv = -1$ $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)_{v=1} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$	keine	17
3*	$\sigma_x = -1 \left\{ \begin{matrix} v=0 \\ v=1/4 \\ v=1/2 \\ v=3/4 \\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$ $\varrho_0 \int_0^1 \sigma_x \, dv = -1$	$a_2 = 0$	17
2*	$\sigma_x = -1 \left\{ \begin{matrix} v=0 \\ v=1/2 \\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0 \quad \varrho = \varrho_0;$ $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)_{v=1/2} = 0 \quad \varrho = \varrho_0$	$\sigma_x - \sigma_y = 0$ $\varrho = \frac{3}{2}\varrho_0$	13
2**	$\left. \begin{matrix} \sigma_x = -1;\ v=0 \\ \sigma_x = 0;\ v=1 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0;\ v=1 \end{matrix} \right\} \varrho = \varrho_0$ $\tau_{xy} = 0; \quad \varrho = \varrho_0$	$\sigma_x - \varrho_y = 0$ $\varrho = \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2}\varrho_0 \\ 3\varrho_0 \end{matrix} \right.$	13

In Abb. 3 und 4 sind die Randspannungen und die Spannungen in den Mittellinien für den Fall 2 und 2* graphisch wiedergegeben. Zum Schluß sei noch in Abb. 5 das sich nach Fall 2 ergebende Trajektorienbild aufgezeichnet.

Die Ergebnisse der angeführten Versuchsrechnung sind in der folgenden Kurventafel (Abb. 6) dargestellt. Neben der Belastungsfunktion ist die Abweichung der Spannungen an den Diagonalen $(\sigma_x, \sigma_y)_{v=1/2}$ vom arithmetischen Mittel der Spannung an jedem Punkt aufgetragen.

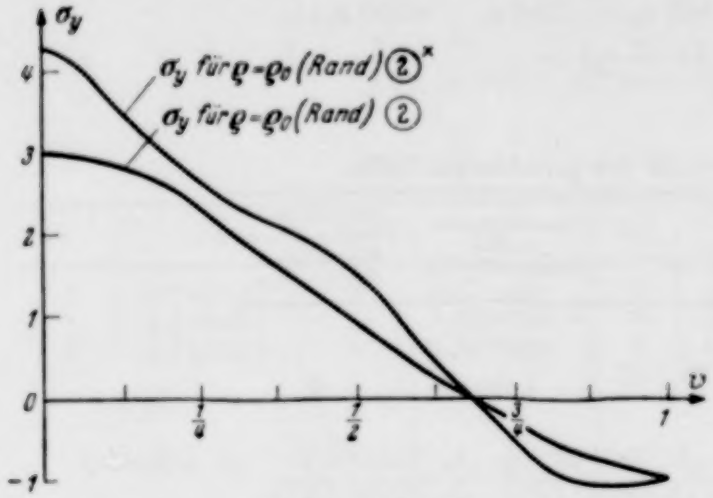

Abb. 3. σ_y am Rand.

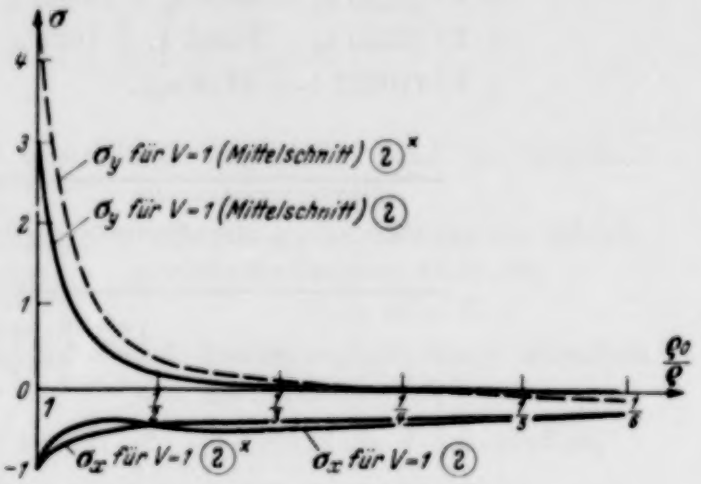

Abb. 4. Spannungen im Mittelschnitt.

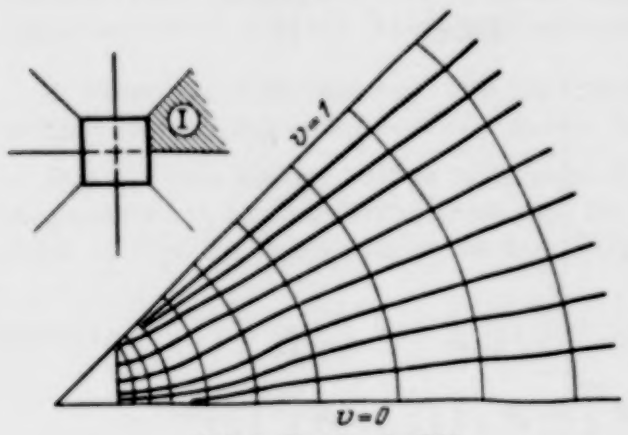

Abb. 5. Trajektorienfeld.

Man beachte die großen Zeichenmaßstäbe und den eingetragenen Spannungsmaximalwert von der Einheit.

4. Diskussion der Ergebnisse. Vergleicht man Abb. 1a, 2a, 3a, so erkennt man, daß eine Hinzunahme von Potentialfunktionen eine erhebliche Verbesserung in der Annäherung der Belastungsfunktion liefert (in Abb. 3a ist der Unterschied graphisch nicht mehr zu erkennen). Die Stetigkeit der Spannungen an der Diagonalen wird jedoch nur für größere ϱ-Werte verbessert, während nahe an $\varrho = \varrho_0$ sogar eine geringfügige Verschlechterung auftritt. Das Gebiet der nennenswerten Abweichungen der Normalspannungen wird jedenfalls verkleinert. Doch scheint dieser Weg für die weitere Rechnung nicht der günstigste zu sein.

Eine wesentliche Verbesserung der Stetigkeit der Normalspannungen an der Diagonalen durch direkte Annäherung ihrer Potenzreihen, d. h. Gleichsetzen gewisser Potenzglieder (in ϱ/ϱ_0) der Polynome der Spannungen zeigt Abb. 3*. Da die Anzahl der Potentialfunktionen beibehalten wurde, tritt eine Verschlechterung der Randspannungsnäherung ein, die aber nicht wesentlich ist. In dieser Methode liegt auch der Weg für weitere Rechnungen, um zu noch genaueren Resultaten zu gelangen.

Daß eine punktweise Erfüllung der Stetigkeitsbedingung nicht zu empfehlen ist, zeigt Abb. 2* und 2**. Randbelastungs- und Spannungsdifferenzen sind gegenüber denen der bisher besprochenen Methoden sehr groß. Als Ergängung ist in Abb. 2** eine Randbelastungsfunktion angenommen worden, die in der Ecke verschwindet, wobei jedoch zwei Punktvorschriften für die Stetigkeit an der Diagonalen vorgegeben worden sind. Es zeigt sich etwa das gleiche Bild, abgesehen davon, daß durch Punktvorschriften an der Diagonalen der Rechenaufwand merklich erhöht wird.

5. Schlußbemerkung. Die Anwendung der Methode der Polynomdarstellung für Lösungen des Scheibenproblems der vorliegenden Art hat gezeigt, daß man mit verhältnismäßig wenig Rechenarbeit zu brauchbaren Ergebnissen gelangt. Die Gleichungssysteme zur Erfüllung der Randbedingungen lassen sich sukzessive leicht lösen, so daß die einmal durchgeführte Auflösung auch für andere doppelsymmetrische Randbelastungen bestehen bleibt. Da die Stetigkeit der Spannungen in den Ecken a priori erfüllt wird, besteht nur noch die Aufgabe darin, ein vernünftiges Verhältnis zwischen der Annäherung der Belastungsfunktion und der Stetigkeit der Spannungen außerhalb der Ecken zu finden, was hier numerisch durchgeführt wurde.

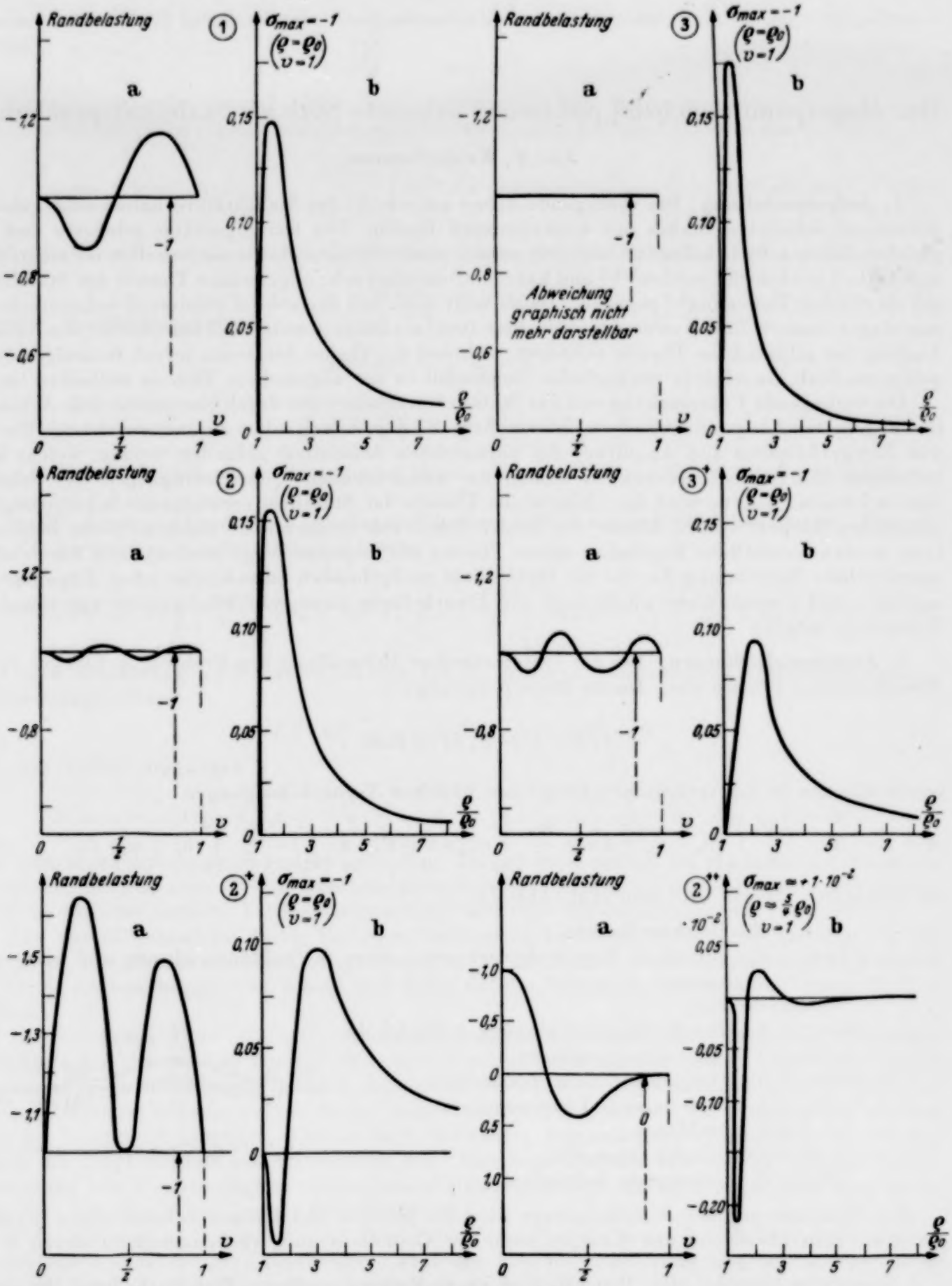

Abb. 6. Graphische Darstellung.
a) der Randbelastung und b) der Spannungsabweichung $\frac{1}{2}\sigma_x - \sigma_y$ an der Diagonalen $v = 1$ bei den durchgerechneten Beispielen.

Institut für Mechanik der Technischen Hochschule Aachen.

(Eingegangen am 26. September 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Montag*, Aachen, Technische Hochschule, Lehrstuhl für Mechanik.

Der eingespannte, achsial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem*.

Von **F. Weidenhammer.**

1. Aufgabenstellung. Die vorliegende Arbeit untersucht das Stabilitätsverhalten eines achsial pulsierend belasteten Stabes mit eingespannten Enden. Der freiaufgestützt gelagerte und in gleicher Weise achsial belastete Stab mit seinem merkwürdigen Resonanzverhalten ist mehrfach ausführlich untersucht worden[1,2,3] und hat Anlaß zu einer sehr allgemeinen Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung[4,5] gegeben. Dabei zeigt sich, daß der achsial pulsierend belastete Stab mit eingespannten Enden etwa der einfachste (weil eindimensionale) Fall ist, welcher den vollen Umfang der allgemeinen Theorie erfordert, während der ebenso belastete, jedoch freiaufgestützt gelagerte Stab als leichter zugänglicher Sonderfall in der allgemeinen Theorie enthalten ist.

Die vorliegende Untersuchung will das Stabilitätsverhalten der durch eine pulsierende Achsiallast angeregten Längsschwingungen untersuchen. Zu dem Zweck sollen zusammengehörige Werte von Erregerfrequenz und Amplitude der pulsierenden Achsiallast gefunden werden, welche bei beliebigen Anfangsbedingungen zu unbegrenzt anwachsenden Querschwingungen des Stabes führen können. Hierzu wird die „Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper" von *E. Mettler*[5] verwandt. Durch eine etwas andere mathematische Behandlung werden wesentliche Ergebnisse dieser Theorie auf anderem Wege bestätigt und durch eine unmittelbare Berechnung des für die Instabilität maßgebenden charakteristischen Exponenten ergänzt. Auf diesem Wege wurde auch die Einarbeitung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung möglich.

2. Ausgangsgleichungen. Bei der systematischen Behandlung des Problems geht man vom *Hamilton*schen Prinzip aus. Dieses Prinzip verlangt

$$\int_{t_1}^{t_2} (A + V - T)\, dt = \text{Extr.}, \tag{1}$$

worin mit den in der technischen Biegelehre üblichen Vernachlässigungen

$$A + V - T = \frac{EF}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} \right)^2 dx + \frac{EJ}{2} \int_{-l/2}^{l/2} w_{xx}^2\, dx + P(t)\, u\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{\mu}{2} \int_{-l/2}^{l/2} (u_t^2 + w_t^2)\, dx \tag{2}$$

zu setzen ist[6]. Hierin bedeuten (vgl. Abb. 1):

z, x = die Ortskoordinaten,
$u(x,t), w(x,t)$ = die gesuchten Verschiebungskomponenten in Stablängsrichtung und quer zur Stabachse,
t = die Zeit,
J = Const. = das für die Biegeschwingung maßgebende Flächenträgheitsmoment,
F = Const. = die Querschnittfläche des Stabes,
μ = Const. = die Stabmasse je Längeneinheit,
l = die Stablänge,
E = den Elastizitätsmodul,
$P(t)$ = die pulsierende Achsiallast.

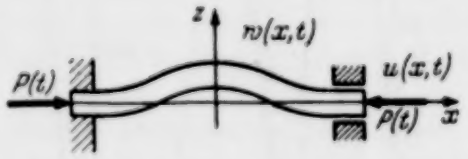

Abb. 1. Der Stab im Koordinatensystem.

Zur Beantwortung der Stabilitätsfrage wird die Methode der kleinen Schwingungen herangezogen. Man überlagert den Komponenten der Grundbewegung (gekennzeichnet durch den

---

* Dissertation Clausthal 1950. Referent: Prof. Dr. *E. Mettler*. Korreferent: Prof. Dr. *K. Jung*. Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. *E. Mettler* für die Anregung zu dieser Arbeit und für verständnisvolle Förderung zu herzlichem Dank verpflichtet.

[1] *E. Mettler*, Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte-Konzerns 8 (1940) S. 1.
[2] *K. Klotter*, Forschg. Ing.-Wes. 12 (1941), S. 209.
[3] *S. Lubkin-J. J. Stoker*, Quart. Appl. Math. 1 (1943), S. 215.
[4] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 135.
[5] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418.
[6] Vgl. *E. Mettler*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 97.

oberen Index Null) infinitesimale Zusatzverschiebungen (gekennzeichnet durch einen Querstrich)[1]:

$$u = u^{(0)} + \bar{u}\,, \qquad w = w^{(0)} + \bar{w}\,. \tag{3}$$

Hier speziell ist der Grundbewegungszustand die reine Längsbewegung: $w^{(0)} = 0$. Geht man mit dem Ansatz (3) in (2) ein, so findet man für die Glieder nullten Grades in den $\bar{u}$ und $\bar{w}$

$$\int_{t_1}^{t_2} (A^{(0)} + V^{(0)} - T^{(0)})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{EF}{2}\int_{-l/2}^{l/2} u_x^{(0)^2}\,dx + P(t)\,u^{(0)}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{\mu}{2}\int_{-l/2}^{l/2} u_t^{(0)^2}\,dx\right] dt\,, \tag{2}^0$$

und nach Variation ergibt sich für die Grundlängsbewegung als *Euler*sche Differentialgleichung

$$-EF\,u_{xx}^{(0)} + \mu\,u_{tt}^{(0)} = 0 \tag{4}$$

mit den Randbedingungen

$$u^{(0)}\left(x = -\frac{l}{2}\,,\,t\right) = 0\,, \tag{4'}$$

$$EF\,u_x^{(0)}\left(x = \frac{l}{2}\,,\,t\right) + P(t) = 0\,. \tag{4''}$$

Diese Differentialgleichung wird später zu lösen sein, um die Grundbewegung formelmäßig zu beschreiben.

Die Glieder ersten Grades in $\bar{u}, \bar{w}$ heben sich heraus, weil sie die ersten Variationen von $(2)^0$ sind. Die Glieder zweiten Grades hingegen liefern

$$\int_{t_1}^{t_2} (A^{(2)} - T^{(2)})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{EF}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\bar{u}_x^2 + u_x^{(0)}\,\bar{w}_x^2\right) dx + \frac{EJ}{2}\int_{-l/2}^{l/2} \bar{w}_{xx}^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_{-l/2}^{l/2} (\bar{u}_t^2 + \bar{w}_t^2)\,dx\right] dt\,, \tag{2}^2$$

und nach Ausführung der Variation hat man für die gesuchte Querbewegung $\bar{w}(x,t)$ als *Euler*sche Differentialgleichung

$$-EF\,(u_x^{(0)}\,\bar{w}_x)_x + EJ\,\bar{w}_{xxxx} + \mu\,\bar{w}_{tt} = 0 \tag{5}$$

mit den Randbedingungen

$$\bar{w}\left(x = -\frac{l}{2}\,,\,t\right) = \bar{w}_x\left(x = -\frac{l}{2}\,,\,t\right) = 0\,, \qquad \bar{w}\left(x = \frac{l}{2}\,,\,t\right) = \bar{w}_x\left(x = \frac{l}{2}\,,\,t\right) = 0$$

und beliebigen Anfangsbedingungen gefunden. Da $u^{(0)}(x,t)$ zufolge (4) als bekannte Funktion anzusehen ist, hat man für die Querbewegung $\bar{w}(x,t)$ eine gemischte Rand- und Anfangswertaufgabe für eine partielle Differentialgleichung mit zeit- und ortsabhängigen Koeffizienten.

Die aus $(2)^2$ ebenfalls durch Variation herleitbare *Euler*sche Differentialgleichung für die Funktion $\bar{u}$ beschreibt die freien Längsschwingungen des Stabes. Diese interessieren im weiteren nicht, da sie unabhängig von $\bar{w}$ sind und daher auf die Stabilitätsuntersuchung keinen Einfluß haben.

Da Gleichung (5) zwangsläufig aus dem *Hamilton*schen Prinzip folgt, kann sie vollständig mit Hilfe der allgemeinen Theorie[2] diskutiert werden. Man kann (5) jedoch auch nachträglich als Gleichgewichtsbedingung am Stabelement für die Kräfte in Querrichtung deuten. Der erste Summand ist bis auf den Faktor dx der Anteil der Querkomponente am Stabelement, welcher von der Längskraft herrührt. Ebenso stellt der zweite Summand den Querkraftanteil und der dritte die Trägheitskraft am Stabelement dar. Man kann also sinnvoll in diese Gleichgewichtsbedingung eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft einfügen, auch wenn diese nicht aus dem ursprünglichen Ansatz herzuleiten ist.

Man darf zwar nicht erwarten, mit dem Dämpfungsglied die in der Wirklichkeit vorliegenden Verhältnisse vollständig zu beschreiben, aber der Einfluß einer Dämpfung soll wenigstens in dieser Näherung in die Betrachtungen einbezogen werden.

Die so ergänzte Gleichung (5) lautet daher (unter Weglassung des Querstriches)

$$EJ\,w_{xxxx} - EF\,(u_x^{(0)}\,w_x)_x + \mu\,w_{tt} + \beta\,w_t = 0\,. \tag{6}$$

Um auch diese Differentialgleichung als eine *Euler*sche Gleichung auffassen zu können, hat man

[1] Vgl. Fußnote 4 von S. 162.
[2] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

die Ableitung ungerader Ordnung βw_t durch eine geeignete Transformation zu beseitigen. Setzt man zu dem Zweck

$$w(x, t) = e^{-\frac{\beta}{2\mu} t} \cdot W(x, t) , \tag{7}$$

so wird

$$EJ\, W_{xxxx} - EF\,(u_x^{(0)}\, W_x)_x + \mu\, W_{tt} - \frac{\beta^2}{4\mu} W = 0 \tag{8}$$

mit $W = W_x = 0$ an den Stabenden und beliebigen Anfangsbedingungen.

Die Funktion $W(x, t)$ hat keine unmittelbare mechanische Bedeutung mehr. Man kann W etwa auffassen als die Querverschiebung eines Ersatzstabes, bei welchem die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung durch eine ausschlagproportionale ersetzt ist.

Die Differentialgleichung (8) wird für die weitere rechnerische Behandlung als *Eulersche* Gleichung des Variations-Ausdruckes

$$2\,L = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-l/2}^{l/2} \left[EJ\, W_{xx}^2 + EF u_x^{(0)}\, W_x^2 - \mu\, W_t^2 - \frac{\beta^2}{4\mu} W^2 \right] dx\, dt = \text{Extr.} \tag{9}$$

aufgefaßt. Die hierin auftretende Funktion $u^{(0)}$ kennzeichnet die Grundbewegung und ist aus (4) zu bestimmen. Die in den Randbedingungen von (4) vorkommende pulsierende Achsiallast $P(t)$ soll im weiteren aus einem ruhenden Anteil P_0 und einem harmonisch schwingenden Bestandteil mit der Amplitude P_1 und der Frequenz ω bestehen:

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t .$$

Dann ist die Grundbewegung nach (4) mit (4′) und (4″) leicht anzugeben:

$$u^{(0)} = -\frac{P_0 \left(x + \frac{l}{2}\right)}{EF} - \frac{P_1}{EF} \cdot \frac{\sin \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EF}} \left(x + \frac{l}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EF}} \cos \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EF}}\, l} \cos \omega t . \tag{10}$$

Um in der weiteren Rechnung von den speziellen Stababmessungen frei zu werden, sollen geeignete Veränderliche und Parameter eingeführt werden. Außer einer dimensionslosen Ortskoordinate $\xi = x/l$ wird auch eine dimensionslose Zeitzählung

$$s = \omega t \tag{11}$$

eingeführt. Die Längsanregungsfrequenz ω wird ebenfalls durch eine reine Zahl δ in Einheiten $f = \sqrt{EJ/\mu l^4}$ der Biegeschwingungsfrequenzen gemessen:

$$\omega = \delta f = \delta \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} . \tag{12}$$

Der Kürze wegen wird die Zahl δ trotzdem als Frequenz bezeichnet. Ferner wird auch die Amplitude des pulsierenden Lastanteiles P_1 in einem relativen Maß angegeben. Durch Vergleich von P_1 mit der *Eulers*chen Knicklast P_E eines Stabes mit gleicher Lagerung (ein Ende frei, das andere eingespannt) werde die relative Lastamplitude

$$\varepsilon = \frac{P_1}{P_E} = \frac{P_1}{4\,\pi^2 \frac{EJ}{l^2}} \tag{13}$$

eingeführt. Da bei einer normalen technischen Aufgabenstellung die pulsierende Achsiallast weit unterhalb der Knicklast bleibt, ist ε im allgemeinen klein gegen 1.

Im weiteren ist es noch zweckmäßig, die Längsanregungsfrequenz ω mit der tiefsten Eigenfrequenz $\omega_{0\,L}$ der Stablängsschwingungen zu vergleichen. Das so eingeführte Resonanzverhältnis

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_{0\,L}} \tag{14}$$

wird in der weiteren Theorie eine wesentliche Rolle spielen. Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß in den bisherigen Untersuchungen[1] stets $\eta = 0$ vorausgesetzt und damit der Resonanzfall

[1] Vgl. die Fußnoten 1, 2 und 3 von S. 162 sowie *K. Kejwal*, Diss. Hannover 1947.

$\eta = 1$ vollständig unterdrückt wurde. Legt man wieder die gleiche Lagerung für den Stab zugrunde, so ist:

$$\omega_{0\,L} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{EF}{\mu l^2}}. \tag{15}$$

Schließlich soll die ruhende Vorlast P_0 durch den dimensionslosen Parameter $2\alpha^2 = \frac{P_0 l^2}{EJ}$ festgelegt werden. Für den Stab ohne Vorlast ($P_0 = 0$) ist also $\alpha = 0$.

Geht man auf die neuen Koordinaten und Parameter über, so folgt zunächst aus (10) das im Variationsausdruck (9) benötigte

$$u_\xi^{(0)} = -\frac{P_0 l}{EF} - \frac{P_1 l}{EF}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta}\cos\omega t \tag{16}$$

und damit

$$L\frac{2\mu}{EJ} = \int_{s_1}^{s_2}\int_{-1/2}^{1/2}\left[-\left((2\alpha^2+\varepsilon\cdot 4\pi^2\cdot\cos s\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta}\right)W_\xi^2 + W_{\xi\xi}^2 - \delta^2 W_s^2 - \frac{\beta^2}{4\mu^2 f^2}W^2\right]d\xi\,ds = \text{Extr.} \tag{17}$$

Hieran knüpft die weitere Rechnung an.

3. Ausgangsgleichungen. a) Übergang zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens des „längsangeregten" Stabes muß man wissen, ob die Querverschiebung $w(x, t)$ für unbegrenzte Zeit endlich bleibt oder nicht. Um zu einer formelmäßigen Näherungslösung für $w(x, t)$ zu kommen, aus welcher man dieses ersehen kann, geht man so vor[1], daß man das Variationsproblem (17) durch einen Ansatz

$$W(\xi, s) \approx \sum_{i=1}^{N} X_i(\xi)\,T_i(s) \tag{18}$$

genähert löst. In diesem Produktansatz sind die X_i geeignete, fest gewählte Ortsfunktionen und die Zeitfunktionen $T_i(s)$ sollen so bestimmt werden, daß der Variationsausdruck einen stationären Wert annimmt. Man hofft, dabei mit einer möglichst kleinen Zahl N von Ansatzgliedern eine brauchbare Näherung zu erhalten. Auf diesem Mittelweg zwischen den direkten und indirekten Methoden der Variationsrechnung gewinnt man eine Näherungslösung zunächst für $W(\xi, s)$ und damit wegen (7) auch für $w(x, t)$.

Als Ortsfunktion im Ansatz (18) werden die Eigenfunktionen (Eigenschwingungsformen) des konstant gedrückten Stabes gewählt, da diese ein bewährtes vollständiges Funktionensystem für Entwicklungen bilden. Aus der Differentialgleichung für die Eigenschwingungen

$$W_{\xi\xi\xi\xi} + 2\alpha^2 W_{\xi\xi} + \delta^2 W_{ss} - \frac{\beta^2}{4\mu^2 f^2}W = 0 \tag{19}$$

mit den Randbedingungen $W = W_\xi = 0$ ergeben sich durch den Produktansatz $W = X(\xi)\,T(s)$ das Eigenwertproblem

$$\left.\begin{aligned} X_i^{IV} + 2\alpha^2 X_i^{II} - \delta_i^2 X_i &= 0 \\ X_i\left(\pm\frac{1}{2}\right) = X_i'\left(\pm\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

mit

und die Schwingungsgleichung

$$\delta^2 T_i'' + \left(\delta_i^2 - \frac{\beta^2}{4\mu^2 f^2}\right)T_i = 0\,. \tag{21}$$

Hierin bezeichnen wie immer im folgenden Striche Ableitungen nach der Ortskoordinate ξ, Punkte Ableitungen nach der „Zeit" s. Die Eigenwerte von (20) bestimmen nach (21) die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen

$$\omega_i^2 = \delta_i^2 f^2 - \frac{\beta^2}{4\mu^2}\,.$$

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

Auf Grund der Selbstadjungiertheit von (20) sind die Eigenfunktionen X_i orthogonal:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_i X_m \, d\xi = 0 \qquad (i \neq m) .$$

Sie werden im folgenden als durch die Bedingung

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_i^2 \, d\xi = 1$$

normiert angenommen.

Multipliziert man (20) mit X_m und integriert partiell unter Beachtung der Randbedingungen über die Stablänge, so folgt auf Grund der Orthogonalität und Normierung

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_m'' X_i'' \, d\xi - 2\alpha^2 \int_{-1/2}^{1/2} X_m' X_i' \, d\xi = -\begin{cases} 0 & (m \neq i) , \\ \delta_i^2 & (m = i) , \end{cases} \tag{22}$$

wovon später Gebrauch gemacht werden wird.

Der Ansatz (18) erfüllt bei der getroffenen Wahl der Ortsfunktionen die Randbedingungen für alle Zeit und wird nun in das Variationsproblem (17) eingeführt. Nach kurzer Rechnung wird dann

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\delta_i^2 - \frac{\beta^2}{4\,\mu^2 f^2} \right) T_i^2 - \delta^2 \sum_{i=1}^{N} \dot{T}_i^2 - \varepsilon \cos s \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} F_{mi} T_m T_i \right] ds = \text{Extr.} , \tag{23}$$

worin zur Abkürzung

$$F_{mi} = F_{im} = \frac{4\pi^2}{\cos \frac{\pi}{2} \eta} \int_{-1/2}^{1/2} \cos \frac{\pi}{2} \eta \left(\xi + \frac{1}{2} \right) X_m' X_i' \, d\xi \tag{24}$$

gesetzt wurde. In den Koeffizienten von T_i^2 kann man in bester Näherung den Einfluß einer kleinen Dämpfung auf die Eigenfrequenzen vernachlässigen. Von der Zulässigkeit dieser Näherung überzeugt man sich leicht durch Einführung des logarithmischen Dekrementes

$$\vartheta_i = \ln \left| \frac{W_1}{W_2} \right| = \frac{\beta \pi}{2 \mu \omega_i} .$$

Mit $\omega_i^2 = \delta_i^2 f^2 - \beta^2/4\mu^2$ wird ein Vergleich der Eigenfrequenzquadrate mit und ohne Dämpfung möglich:

$$\omega_i^2 \Big|_{\text{ged.}} = \delta_i^2 f^2 - \frac{\beta^2}{4\mu^2} = \frac{\delta_i^2 f^2}{1 + \frac{\vartheta_i^2}{\pi^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\vartheta_i^2}{\pi^2}} \omega_i^2 \Big|_{\text{unged.}} .$$

Wenn auch für ϑ_i keine genauen Zahlenwerte vorliegen, so dürfte doch ein Dekrement von $\vartheta = 0{,}1$ bei technischen Aufgabenstellungen kaum erreicht werden. Dann kann man aber ϑ^2/π^2 gegen 1 mit einem Fehler von etwa $1\,^0/_{00}$ vernachlässigen, so daß

$$\delta_i^2 - \frac{\beta^2}{4\,\mu^2 f^2} \approx \delta_i^2$$

ist. Damit (17) einen stationären Wert annimmt, sind die T_i notwendig aus den *Euler*schen Gleichungen

$$\delta^2 T_i'' + \delta_i^2 T_i - \varepsilon \cos s \sum_{m=1}^{N} F_{mi} T_m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{25}$$

zu bestimmen und die Lösungstheorie dieser Gleichungen enthält die Antwort auf die Stabilitätsfrage. Sie werden daher als die Stabilitätsgleichungen bezeichnet.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (25) mit periodischen Koeffizienten ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der *Mathieu*-Gleichung.

Die Funktion $W(x, t) = \sum_{i=1}^{N} X_i T_i$ wird durch die Dämpfung nicht beeinflußt, da diese weder in die Differentialgleichungen für X_i noch in die für die T_i eingeht. Zufolge der Transformation (7) ist $w(x, t) \equiv W(x, t)$, wenn keine Dämpfung vorhanden ist ($\beta = 0$). Für den Fall nicht-

verschwindender Dämpfung ($\beta \neq 0$) tritt nach (7) vor $W(x, t)$ ein mit der Zeit abklingender Exponentialfaktor, ohne daß die weitläufig zu berechnende Funktion $W(x, t)$ selbst sich ändert.

b) Berechnung der Gleichungskonstanten für den Stab ohne Vorlast ($P_0 = 0$). Um die Stabilitätsgleichungen (25) im erforderlichen Umfange lösen zu können, muß man zunächst die darin auftretenden Gleichungskoeffizienten δ_i^2 und $F_{m\,i}$ berechnen. Bei dieser Rechnung wird es notwendig, den Stab ohne und mit ruhender Vorlast getrennt zu behandeln.

Die Theorie des Stabes ohne Vorlast ($P_0 = 0$) erweist sich als die wichtigste, weil sie am weitesten allgemein durchführbar ist und aus dieser Theorie auch noch gewisse Schlüsse auf den Stab mit Vorlast gezogen werden können. Nimmt man daher zunächst $P_0 = 0$, so vereinfacht sich wegen $\varkappa = 0$ das Eigenwertproblem (20) beträchtlich, und die symmetrischen oder antimetrischen Eigenfunktionen mit ihren Eigenwerten sind leicht anzugeben[1]. Die Normierungsfaktoren sind aus der Bedingung

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_i^2 \, d\xi = 1$$

zu bestimmen.

Die Berechnung der Kopplungskoeffizienten $F_{m\,i}$ in (25) bedingt eine weitere Fallunterscheidung, je nachdem man das Resonanzverhältnis η als verschwindend klein annehmen kann oder nicht.

α) Vereinfachte Theorie; Resonanzverhältnis klein. Verlangt man, daß die Anregungsfrequenz ω sehr weit unter der tiefsten Eigenfrequenz der Längsschwingungen bleibt, so ist $\eta = \omega/\omega_{0L}$ sehr klein, und man kann in angebbarer Näherung die in den Kopplungskoeffizienten (24) vorkommenden cos-Funktionen durch 1 ersetzen. Das ist zulässig, wenn in

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta\left(\xi+\frac{1}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta} = 1 + \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \left[\xi+\frac{1}{2}\right]^2\right)\eta^2 + 0\eta^4$$

Potenzen η^2 vernachlässigbar klein sind. Mechanisch verlangt diese Forderung, daß die Längskraft im Stab keinen örtlich nennenswert verschiedenen Längsspannungszustand anregen darf. Diese Voraussetzung ist hinreichend gut nur bei sehr schlanken Stäben verwirklicht. Dies ersieht man unmittelbar aus einer anderen Deutung des Resonanzverhältnisses mit Hilfe des Schlankheitsgrades λ:

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_{0L}} = \frac{\delta\sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}}}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{EF}{\mu l^2}}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\delta}{\lambda}\,.$$

Da die wichtigsten Instabilitätsbereiche in der Nähe der doppelten Eigenfrequenzen liegen, wie später ausführlich begründet wird, hat die vereinfachte Theorie nur eingeschränkte zahlenmäßige Bedeutung. Für die 2. Eigenfrequenz findet man z. B. $2\delta_2 = 133{,}35$ und die Forderung

$$\eta = \frac{78{,}53}{\lambda} \ll 1$$

führt bereits zu so hohen Schlankheitsgraden, wie sie in der Technik nicht vorkommen dürften. Trotz dieser Einschränkung ist die vereinfachte Theorie sehr wichtig, denn sie ermöglicht einen fast vollständigen Überblick über die Erscheinungen und wird daher zunächst ausführlich entwickelt.

Für $\eta = 0$ hat man die Kopplungskoeffizienten

$$F_{m\,i} = 4\pi^2 \psi_{m\,i} = 4\pi^2 \psi_{i\,m} \tag{26}$$

einfach mit Hilfe des bestimmten Integrales

$$\psi_{m\,i} = \int_{-1/2}^{1/2} X_m' X_i' \, d\xi$$

zu berechnen. Für $m \neq i$ folgt aus den differenzierten Differentialgleichungen (20) nach ge-

[1] Vgl. z. B. *Lord Rayleigh*, The Theory of Sound, 2. Aufl. London 1926.

eigneter Multiplikation und Addition

$$X_m^V X_i' - X_i^V X_m' = (\delta_m^2 - \delta_i^2) X_m' X_i' .$$

Nach Integration über die Stablänge unter Beachtung der Randbedingungen erhält man daraus das gesuchte

$$\psi_{m\,i} = \frac{[X_i''' X_m'']_{-1/2}^{1/2} - [X_m''' X_i'']_{-1/2}^{1/2}}{\delta_m^2 - \delta_i^2} \qquad (m \neq i) . \tag{27}$$

Da in den Randausdrücken Produkte einer geraden und einer ungeraden Ableitung auftreten, wird $\psi_{m\,i} = 0$, wenn nicht beide Zeiger m und i zu einer symmetrischen oder antimetrischen Eigenfunktion gehören. Das Gleichungssystem (25) zerfällt also (für $\eta = 0$) in zwei getrennte Systeme: je eines für die symmetrischen und für die antimetrischen Ansatzfunktionen. Diese Eigenschaft der $\psi_{m\,i}$ kann man auch unmittelbar aus der geometrischen Deutung des bestimmten Integrales für $\psi_{m\,i}$ entnehmen. Man erkennt dann weiter, daß für $\eta \neq 0$ eine Belegungsfunktion unter dem Integralzeichen auftritt und infolgedessen der Zerfall in zwei getrennte Systeme nicht mehr erwartet werden kann. — Die Berechnung der $\psi_{m\,i}$ für $m = i$ kann durch unmittelbare Integration oder durch Grenzübergang auf einem von Lord *Rayleigh*[1] angegebenen Wege ausgeführt werden. Es ergibt sich

$$\psi_{i\,i} = \frac{1}{4\,\delta_i^2}\left([\xi\, X_i'''^2]_{-1/2}^{1/2} - [X_i''' X_i']_{-1/2}^{1/2} \right). \tag{28}$$

Das Ergebnis der Zahlenrechnung ist in Tab. 1 wiedergegeben. Alle dort gegebenen Zahlenwerte sind unabhängig von den speziellen Stababmessungen und daher kann man mit ihnen die Stabilitätsgleichungen (25) ein für allemal lösen. Dies ist ein großer Vorzug der vereinfachten Theorie.

Tabelle 1. $\alpha = 0$.

$(\psi_{m\,i}) =$

m \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12,3069	0	9,7306	0	−7,6152	0	6,1079	0	−5,0664	0	4,3295
2		46,0501	0	17,1412	0	−15,2025	0	÷	0	÷	0
3			98,9082	0	24,3492	0	−22,9838	0	20,8527	0	−18,7853
4				171,5923	0	31,2762	0	÷	0	÷	0
5					263,9739	0	38,0301	0	−37,9606	0	36,3966
6						376,1481	0	÷	0	÷	0
7							508,0461	0	51,2309	0	−52,2028
8			$\psi_{mi} = \psi_{im}$					÷	0	÷	0
9									860,8818	0	232,2902
10										÷	0
11											1269,7329
$\delta_i =$	22,3729	61,6728	120,9032	199,8596	298,5569	416,9893	555,1678	÷	713,0769	÷	890,7300

÷ nicht berechnet.

Für eine spätere Verwendung sollen noch einfache Näherungsformeln für $\psi_{m\,i}$ und $\psi_{i\,i}$ angegeben werden. Durch unmittelbares Ausrechnen findet man für die Werte der normierten Eigenfunktionen am Rande mit der Abkürzung $\delta_i = r_i^2$ die (noch streng geltenden) Formeln

$$X_i''\left(+\frac{1}{2}\right) = \pm X_i''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 r_i^2 \cdot \begin{cases} -\operatorname{sgn}\cos\frac{r_i}{2}, \\ -\operatorname{sgn}\sin\frac{r_i}{2}, \end{cases}$$

$$X_i'''\left(+\frac{1}{2}\right) = \mp X_i'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 r_i^3 \cdot \begin{cases} -\operatorname{tgh}\frac{r_i}{2}\operatorname{sgn}\cos\frac{r_i}{2}, \\ -\operatorname{ctgh}\frac{r_i}{2}\operatorname{sgn}\sin\frac{r_i}{2}, \end{cases}$$

in denen sich die oberen Zeilen jeweils auf die symmetrischen, die unteren auf die antimetrischen

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 167 (Nr. 164—165).

Funktionen beziehen. Da für die Wurzeln r_i die Beziehung gilt

$$\lim_{i\to\infty}\left(r_i-\frac{\pi}{2}(2i+1)\right)=0 \qquad (i>0 \text{ ganz})$$

und schon für $i=1$ $r_i>\frac{3\pi}{2}$ ist, so kann man mit einem maximalen Fehler von 2% $\operatorname{ctgh}\frac{r_i}{2}=\operatorname{tgh}\frac{r_i}{2}=1$ setzen. Dann ergeben sich aus (26) und (27) sehr übersichtliche Näherungsformeln

$$\psi_{mi}\approx\frac{8\,r_m^2\,r_i^2\,(r_i-r_m)}{r_m^4-r_i^4}\cdot\begin{cases}-\operatorname{sgn}\cos\frac{r_i}{2}\cos\frac{r_m}{2}\,,\\ -\operatorname{sgn}\sin\frac{r_i}{2}\sin\frac{r_m}{2}\end{cases} \tag{27*}$$

und

$$\psi_{ii}\approx r_i^2-2\,r_i\,,$$

wobei wegen $r_i>2$ ψ_{ii} stets positiv ist. Sehr wichtig für spätere Schlußfolgerungen sind die Grenzwerte:

$$\lim_{i\to\infty}\psi_{ii}=\infty\,, \qquad \lim_{i\to\infty\,,\ m=\text{const}}\psi_{mi}=0\,.$$

β) **Verschärfte Theorie; Resonanzverhältnis nicht mehr klein.** In einer Verschärfung der bisherigen Theorie soll das Resonanzverhältnis η nicht mehr auf extrem kleine Werte beschränkt bleiben. Jedoch ist die Beschränkung auf Werte $\eta\leq 1$, d.h. auf unterkritische Anregungsfrequenzen bei technischen Fragestellungen von selbst gegeben.

Zur Berechnung der Kopplungskoeffizienten hat man das bestimmte Integral (24) nun ohne Vernachlässigung auszuwerten. Dies ist zwar elementar möglich, führt jedoch auf eine verwickelte Abhängigkeit der ψ_{mi} von $\eta(\omega)$. Da zur Auffindung der Stabilitätsgrenzen später nach ω entwickelt werden muß, kommt man auf diesem Wege zu unübersichtlichen Ausdrücken. Es ist daher einfacher und kein nennenswerter Verlust an Genauigkeit, wenn man in dem Integral (24) die Belegungsfunktion durch die Parabelnäherung

$$\cos\frac{\pi}{2}\eta\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\approx\left(\cos\frac{\pi}{2}\eta-1\right)\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2+1 \qquad (\eta\leq 1)$$

ersetzt. Wie man der Abb. 2 entnehmen kann, macht man für die nur in Betracht kommenden Werte $\eta<1$ durch diesen Ersatz keinen wesentlichen Fehler.

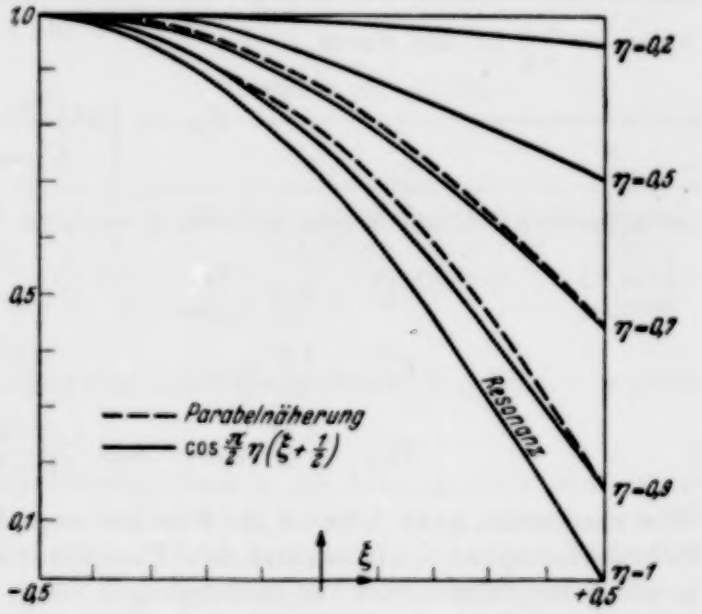

Abb. 2. Ersatz der Belegungsfunktion durch eine Parabelnäherung.

Mit dieser Parabelnäherung ergeben sich die F_{mi} aus (24) mit einer einfachen Abhängigkeit von η

$$F_{mi}=\frac{4\,\pi^2}{\cos\frac{\pi}{2}\eta}\psi_{mi}+4\,\pi^2\frac{\cos\frac{\pi}{2}\eta-1}{\cos\frac{\pi}{2}\eta}\gamma_{mi}\,. \tag{29}$$

Die ψ_{mi} haben die schon in Abschn. α) berechneten Zahlenwerte und die γ_{mi} sind noch durch Integration

$$\gamma_{mi}=\gamma_{im}=\int_{-1/2}^{1/2}\left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2 X_m'\,X_i'\,d\xi \tag{30}$$

zu ermitteln. Auch die γ_{mi} enthalten die speziellen Stababmessungen nicht. Das Ergebnis der Zahlenrechnung gibt Tab. 2 wieder. Da die γ_{mi} im Gegensatz zu den ψ_{mi} für kein Zeigerpaar i, m verschwinden, sind alle Stabilitätsgleichungen (wenn auch verschieden stark) miteinander gekoppelt. Für die γ_{mi} lassen sich entsprechende Näherungsformeln wie für die ψ_{mi} aufstellen.

Tabelle 2. $\alpha = 0$.

$(\gamma_{mi}) =$

m \ i	1	3	5	7	9	11
1	4,2269	1,5129	—2,5633	2,3927	—2,1233	1,8789
3		30,8014	1,3834	—7,4688	8,1282	—7,8715
5			83,7302	—2,9409	—11,4094	13,9102
7		$\gamma_{mi} = \gamma_{im}$		162,9921	—11,4089	—14,1231
9					268,5638	2,0355
11						400,4542

Insbesondere findet man wieder einfache Grenzwerte, welche hier ohne Zwischenrechnung mitgeteilt werden:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\gamma_{ii}}{\psi_{ii}} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{\substack{i \to \infty \\ m = \text{const}}} \gamma_{mi} = 0.$$

Später werden von F_{mi} die Entwicklungskoeffizienten der *Taylor*reihe für eine bestimmte Stelle δ_0 benötigt:

$$F_{mi} = F_{mi}^{(0)} + (\delta - \delta_0) F_{mi}^{(1)} + (\delta - \delta_0)^2 F_{mi}^{(2)} + \dots .$$

Diese sollen schon hier angegeben werden. Dafür ist es zweckmäßig, (29) unter Verwendung von $\eta = \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\lambda}$ in der Form

$$F_{mi} = 4\pi^2 \left(\frac{\psi_{mi} - \gamma_{mi}}{\cos \frac{\pi}{2} \eta} + \gamma_{mi} \right)$$

zu schreiben. Dann lassen sich die gesuchten Koeffizienten leicht angeben:

$$\left.\begin{aligned} F_{mi}^{(0)} &= 4\pi^2 \left(\frac{\psi_{mi} - \gamma_{mi}}{\cos \delta_0/\lambda} + \gamma_{mi} \right), \\ F_{mi}^{(1)} &= \frac{4\pi^2}{\lambda} (\psi_{mi} - \gamma_{mi}) \frac{\sin \delta_0/\lambda}{1! \cos^2 \delta_0/\lambda}, \\ F_{mi}^{(2)} &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} (\psi_{mi} - \gamma_{mi}) \frac{1 + \sin^2 \delta_0/\lambda}{2! \cos^3 \delta_0/\lambda}, \quad \dots . \end{aligned}\right\} \left(\frac{\delta_0}{\lambda} < \frac{\pi}{2} \right). \tag{31}$$

Wie man sieht, geht jetzt in die Koeffizienten F_{mi} und damit in die Stabilitätsgleichungen der Schlankheitsgrad λ als zusätzlicher Parameter ein. Aus der für endliches λ geltenden Theorie gewinnt man durch den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ die Aussagen der vereinfachten Theorie zurück.

c) Berechnung der Gleichungskonstanten für den Stab mit Vorlast ($P_0 \neq 0$). Da jetzt $\alpha \neq 0$ ist, hat man das Eigenwertproblem (20) abhängig von dem jeweiligen Parameterwert α zu lösen. Daher soll hier nur ein Beispiel für symmetrische (normierte) Eigenfunktionen durchgerechnet werden. In Tab. 4 sind die Zahlenwerte δ_i für den speziellen Parameterwert $\alpha = 3{,}1119$ angegeben. In diesem Beispiel ist α und damit im wesentlichen die ruhende Vorlast P_0 etwa gleich der halben Knicklast gewählt: $P_0 = 0{,}4906\, P_E$. Innerhalb der Rechengenauigkeit ist dann $\delta_3 = 7\,\delta_1$. Dies entspricht einem interessanten Sonderfall [vgl. Abschn. 5 a) α)].

Die Berechnung der Kopplungskoeffizienten macht wieder die Fallunterscheidung $\eta = 0$ und $\eta \neq 0$ erforderlich.

α) *Vereinfachte Theorie; Resonanzverhältnis klein.* Die Berechnung der Kopplungskoeffizienten F_{mi} für $\eta = 0$ führt auf dem gleichen Wege, wie in Abschn. 3 b) α) beschrieben, zu denselben Endformeln, da die Randausdrücke mit dem Faktor α verschwinden. Zur Bestimmung der ψ_{mi} hat man nur in (27) die aus (20) zu berechnenden Eigenfunktionen X_i einzusetzen. Da diese von dem Parameter α abhängen, werden auch die ψ_{mi} abhängig von α. Weil die ψ_{mi} außerdem die gleichen Eigenschaften wie in der vereinfachten Theorie des Stabes ohne Vorlast aufweisen [vgl. Abschn. 3 b) α)], entkoppeln sich auch hier die Stabilitätsgleichungen

in zwei getrennte Systeme, welche jeweils von den symmetrischen oder den antimetrischen Ansatzfunktionen herrühren. Die ψ_{ii} sind nur durch unmittelbare Integration zu gewinnen und nicht durch Randausdrücke in der von Lord *Rayleigh* angegebenen Weise auszudrücken. Die Zahlenwerte der Tab. 3 gelten für das erwähnte Beispiel $\alpha = 3{,}1119$.

Tabelle 3. $\alpha = 3{,}119$.

m \ i	1	2	3	4	5	7
1	12,6061	0	10,9147	0	−7,6896	5,9053
2		46,5130	0	27,8200	0	0
3			99,0280	0	25,3528	−23,4513
4		$\Psi_{mi} = \Psi_{mi}$		173,6330	0	0
5					264,0461	38,8954
7						509,2421
$\delta_i =$	16,0997	53,9217	112,6973	191,3692	289,8685	546,2238

$(\Psi_{mi}) =$

β) Verschärfte Theorie; Resonanzverhältnis nicht mehr klein. Die Ausführungen des Abschn. 3 b) β) für den Stab ohne Vorlast lassen sich fast wörtlich auf den vorliegenden Fall $P_0 \neq 0$ übertragen. Die Berechnung der F_{mi} geschieht wieder mit der Parabelnäherung und führt auch hier auf den Ausdruck (29). Die darin vorkommenden ψ_{mi} sind bereits in Abschnitt 3 b) α) berechnet. Die noch zu berechnenden Zahlenwerte der γ_{mi} erhält man, wenn man die Eigenfunktionen X_i von (20) in (30) einführt und die Integrale ausführt. Die wiederum von α abhängigen Ergebnisse sind für das Beispiel $\alpha = 3{,}1119$ in Tab. 4 niedergelegt. Da die γ_{mi} für kein Zeigerpaar m, i verschwinden, ist wie beim Stab ohne Vorlast in der verschärften Theorie eine Entkopplung der Stabilitätsgleichungen nicht mehr möglich.

Die Zahlenwerte von ψ_{mi} und γ_{mi} für das Beispiel $\alpha = 3{,}1119$ (vgl. Tab. 3 und 4) unterscheiden sich kaum von denen des nicht vorgedrückten Stabes (vgl. Tab. 1 und 2). Offenbar ist selbst der Einfluß einer erheblichen Vorlast (im Beispiel fast die Hälfte der Knicklast) gering. Daher ist die ausführliche Behandlung des Stabes ohne Vorlast besonders interessant und man kann erwarten, daß die dabei gewonnenen Ergebnisse in guter Näherung auch für den gedrückten Stab gelten.

Tabelle 4. $\alpha = 3{,}119$.

m \ i	1	2	3	4
1	4,1180	−3,3612	1,9082	−2,2905
2		14,3226	9,8501	1,2761
3			30,9535	−22,3675
4		$\gamma_{mi} = \gamma_{im}$		56,6489

$(\gamma_{mi}) =$

4. Beantwortung der Stabilitätsfrage mit der Störungstheorie. a) Allgemeine Betrachtungen und Formeln. Nach den Vorbereitungen der Abschn. 2 und 3 kann man nun an die Beantwortung der Stabilitätsfrage gehen. Dabei soll eine Bewegung $w(x, t)$ quer zur Stabachse wie üblich nur dann stabil heißen, wenn $w(x, t)$ für eine beliebig gewählte Anfangsstörung

$$w(x, t = t_0) \qquad w_t(x, t = t_0)$$

auf unbegrenzte Zeit endlich bleibt. Falls dagegen $|w|$ trotz beliebig kleiner Anfangsstörung mit unbegrenzt wachsender Zeit über jede Grenze wächst, soll die Bewegung instabil heißen. Für die Funktion $w(x, t)$, welche die Stabilitätsfrage beantwortet, wurde der Näherungssatz

$$w \approx e^{-\frac{\beta}{2\mu} t} \sum_{i=1}^{N} X_i(x) \cdot T_i(t) \tag{32}$$

gemacht. Da die Ortsfunktionen X_i in (32) als Eigenfunktionen von (20) gewählt sind, ist die Erfüllung der Randbedingungen für die Lösung w des Gesamtproblems für alle Zeit gesichert. Man hofft, in (32) die Lösung w mit einer Summe aus möglichst wenigen Ansatzgliedern annähern zu können, denn für einen N-gliedrigen Ansatz ergibt sich i. a. das System (25) von N Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten zur Bestimmung der Zeitfunktionen T_i. Die allgemeine Lösung von (25) setzt sich additiv aus dem Fundamentalsystem der $2N$ partikulären Integrale T_{mi} mit ebensovielen Integrationskonstanten zusammen. Somit hat also

(32) die Gestalt

$$w \approx e^{-\frac{\beta}{2\mu}t} \sum_{i=1}^{N} X_i(x) \sum_{m=1}^{2N} T_{im}(t),$$

und es kommt im weiteren auf die Diskussion der Zeitfunktionen

$$e^{-\frac{\beta}{2\mu}t} T_{im}(t) \qquad (i, m = 1, 2, \ldots, N)$$

an. Da die T_{im} als Lösungen von (25) gefunden werden müssen, ist das Studium dieses Differentialgleichungssystems das mathematische Hauptproblem für eine Beantwortung der Stabilitätsfrage. Bei *E. Mettler*[1] Abschn. II und III findet man die Lösungstheorie in dem Umfange, wie er hier benötigt wird, und diese Theorie muß für das weitere als bekannt vorausgesetzt werden. Zunächst entnimmt man der dort gegebenen Spezialisierung des *Floquet*schen Theorems auf das vorliegende System (25), daß das Fundamentalsystem die Form

$$T_{im} = e^{\sqrt{-1}\varrho_m s} \varphi_{im}(s), \quad T^*_{im} = e^{-\sqrt{-1}\varrho_m s} \varphi_{im}(-s) \tag{33}$$

haben muß. Hierin sind die $\varphi_{im}(s + 2\pi) = \varphi_{im}(s)$ periodische Funktionen von s mit der Periode 2π, welche sich in eine *Fourier*reihe entwickeln lassen. Die N Zahlen ϱ_m sind im allgemeinen komplex und werden als charakteristische Exponenten bezeichnet. Wenn es unter ihnen einen mit nicht verschwindendem Imaginärteil gibt, so spaltet der betreffende Teil der Lösung (32) einen reellen Exponentialfaktor

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{2\mu} \pm \omega\, Im\, \varrho_m\right\} t \tag{34}$$

ab. Der Klammerfaktor in (34) werde als der „Stabilitätsindex" bezeichnet, denn er gibt die Entscheidung über Stabilität oder Instabilität. Gibt es in (32) auch nur einen positiven Stabilitätsindex, so herrscht keine Stabilität. Die wesentliche mathematische Aufgabe ist im folgenden daher die Berechnung der charakteristischen Exponenten, abhängig von der „Frequenz" δ und von der relativen Amplitude ε der harmonisch pulsierenden Längslast.

Dabei wird noch die weitergehende Frage gestellt, welche zusammengehörigen Werte von δ und ε die stabilen Lösungen von den instabilen trennen. Dazu ist zunächst zu sagen, daß für hinreichend kleine ε die Lösungen im allgemeinen stabil sind. Dies Verhalten ist mechanich plausibel, denn für $\varepsilon = 0$ erhält man als Grenzfall die stabilen Bewegungsformen des freischwingenden Stabes. In dem anderen Grenzfall großer ε wird man als Folge der großen pulsierenden Längskraft erwarten, daß die Bewegungen des Stabes im allgemeinen instabil sind und stabile Lösungsformen die Ausnahmen bilden. Dies kann man auch rechnerisch leicht verfolgen, indem man zeigt, daß (25) für $\varepsilon \gg$ im allgemeinen instabile Lösungen hat, was dann wegen (32) auch für die Querbewegung $w(x, t)$ selbst gilt.

Schreibt man nämlich das Differentialgleichungssystem (25) in der Form

$$\delta^2 T_i'' + \sum_{m=1}^{N} \left\{\delta_i^2 \frac{e_{im}}{F_{im}} - \varepsilon \cos s\right\} F_{im} T_m = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

mit

$$e_{im} = \begin{cases} 0 & (i \neq m) \\ 1 & (i = m), \end{cases}$$

so kann man in den Koeffizienten von T_m bei unbegrenzt wachsendem ε in erster Näherung den Summanden $\delta_i^2\, e_{im}/F_{im}$ vernachlässigen. Für die so definierten Näherungslösungen $\tilde{T}_i$ gilt dann

$$\delta^2 \tilde{T}_i'' - \varepsilon \cos s \sum_{i=1}^{N} F_{im}\, \tilde{T}_m = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{25'}$$

und es ist leicht, zu weiteren Aussagen über die Lösungen für $\varepsilon \to \infty$ zu kommen, indem man aus dem System (25′) eine Folge von einzelnen *Mathieu*-Gleichungen ableitet. Da das asymp-

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

totische Verhalten der Lösungen der *Mathieu*-Gleichung für große ε bekannt ist, verspricht dieser Weg Erfolg. Die gekoppelten Differentialgleichungen (25′) lassen sich vorteilhaft als *Euler*sche Gleichungen des Variationsproblems

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\delta^2 \sum_{i=1}^{N} \tilde{T}_i'^2 - \varepsilon \cos s \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} F_{mi} \tilde{T}_m \tilde{T}_i \right] ds = \text{Extr.} \tag{35}$$

auffassen, und man kann hierzu stets eine orthogonale Transformation

$$\tilde{T}_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} \bar{T}i \qquad (j = 1, \ldots, N) \tag{36}$$

finden, welche die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} F_{mi} \tilde{T}_m \tilde{T}_i$$

in eine rein quadratische Form überführt und außerdem $\sum_{i=1}^{N} \tilde{T}_i'^2$ ungeändert läßt. Denkt man sich diese Transformation ausgeführt, so erhält man an Stelle von (35)

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\delta^2 \sum_{i=1}^{N} \bar{T}_i'^2 - \varepsilon \cos s \sum_{i=1}^{N} \nu_i \bar{T}_i'^2 \right] ds = \text{Extr.}, \tag{35′}$$

worin auch die ν_i reell sind. An Stelle von (25′) treten nun die *Euler*schen Gleichungen

$$\delta^2 \bar{T}_i'' - \varepsilon \cos s \cdot \nu_i \bar{T}_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{25″}$$

Diese Differentialgleichungen sind im Gegensatz zu (25′) eine Folge von entkoppelten *Mathieu*-Gleichungen, von denen bekannt ist, daß sie für $\varepsilon \to \infty$ auf im allgemeinen instabile Lösungen führen. Infolge der Transformation (36) gilt dies auch für die Lösungen des Systems (25′). Damit ist der Nachweis erbracht, daß die Bewegungen des Stabes bei sehr großen pulsierenden Längskräften im allgemeinen instabil sind.

Die Beantwortung der Stabilitätsfrage für endlich großes ε soll auf zweierlei Wegen angestrebt werden. Zunächst gibt es[1] eine umfassende Lösung des Problems der weitergehenden Frage nach denjenigen zusammengehörigen Werten von δ und ε, welche stabile und instabile Lösungen trennen. Diese Theorie ist hinsichtlich der Allgemeinheit und der numerischen Brauchbarkeit die weitreichendste. Sie wird hier nach ihrem mathematischen Aufbau als Störungstheorie bezeichnet. Allerdings ist das Dämpfungsproblem in diese Theorie nicht eingearbeitet. Ferner sind einige Sonderfälle hinsichtlich der Eigenfrequenzen in der genannten Theorie aus rein rechnerischen Gründen ausgeschlossen worden. Die Störungstheorie wird daher zunächst zur Aufsuchung der Grenzkurven der Instabilitäts-Bereiche in der (δ, ε)-Ebene für den Stab ohne Dämpfung angewandt. Im nachfolgenden Abschn. 5 soll dann noch ein zweiter Weg zur Beantwortung der Stabilitätsfrage beschritten werden. Dabei soll mit der Theorie unendlicher Determinanten der Stabilitätsindex, d. h. im wesentlichen der charakteristische Exponent, unmittelbar berechnet werden. Dieser Weg kann nicht ohne größeren Aufwand die gleiche Allgemeinheit erreichen, bietet aber einen gewissen Einblick auch in das Problem der Dämpfung und gestattet, die genannten Sonderfälle zu behandeln. Zudem bietet diese andersartige Behandlungsweise die Möglichkeit, wesentliche Ergebnisse der Störungstheorie zu bestätigen.

Die Berechnung der Grenzkurven zwischen Stabilitäts- und Instabilitätsbereichen in der (δ, ε)-Ebene mit Hilfe der Störungstheorie geht von der bekannten Tatsache aus, daß die Instabilitätsbereiche auf der δ-Achse in den Punkten

$$\delta_0 = \frac{2\,\delta_i}{p} \qquad (p > 0, \text{ ganz})$$

bei Bereichen erster Art der Ordnung p und in

$$\delta_0 = \frac{\delta_r + \delta_k}{p}$$

bei Bereichen zweiter Art der Ordnung p beginnen. Die Grenzkurven $\delta_G\,(\varepsilon)$ werden durch Potenzreihen

$$\delta_G = \delta_0 + \varepsilon\,\delta_G^{(1)} + \varepsilon^2 \delta_G^{(2)} + \ldots \tag{37}$$

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

dargestellt. Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten gelingt dadurch, daß man in den Lösungen (33) die periodischen Funktionen φ_{mi} in Form von *Fourier*reihen annimmt und dann sowohl deren Koeffizienten als auch die charakteristischen Exponenten selbst in Form von Potenzreihen nach ε entwickelt. Nach Einsetzen dieser Reihen in die Stabilitätsgleichungen (25) kann man in einem Rekursionsverfahren nach Art der Störungstheorie die Koeffizienten so bestimmen, daß der Imaginärteil von ϱ_m gerade den Grenzwert Null bekommt. Das Verfahren kann hier nicht noch einmal auseinandergesetzt werden. Es wurde für die Berechnung der $\delta_G^{(j)}$ in unveränderter Form verwendet. Dabei wurde die Theorie insofern ergänzt, als die Koeffizienten $\delta_G^{(j)}$ bis $j = 2$ und bis zur Ordnung $p = 4$ als geschlossene Formeln explizit in ihrer Abhängigkeit von den Gleichungskonstanten ausgerechnet wurden. Diese Formeln sind in Tab. 5 zusammengestellt. Auf die Wiedergabe des Ausdrucks für $\delta_G^{(3)}$ für $p = 1$ muß seiner Länge wegen jedoch verzichtet werden.

Tabelle 5. *Grenzkurvenentwicklungen für Bereiche zweiter Art*: $\delta_G = \delta_0 + \delta_G^{(1)}\,\varepsilon + \delta_G^{(2)}\,\varepsilon^2 + 0\varepsilon^3$.

p	$\delta_G^{(1)}$	$\delta_G^{(2)}$
1	$\pm \dfrac{F_{rk}^{(0)}}{2} \dfrac{1}{\sqrt{\delta_r\,\delta_k}}$	$-\dfrac{F_{rk}^{(0)2}}{32}\left(\dfrac{1}{\delta_r\,\delta_k^2}+\dfrac{1}{\delta_k\,\delta_r^2}\right)+\dot{\sum_{n=r,k}}\sum_{m=1}^{N}\dfrac{1}{2\,\delta_n}\left(\dfrac{F_{nm}^{(0)}}{2}\right)^2\left\{\dfrac{1}{\delta_n^2-\delta_m^2}+\dfrac{1}{(\delta_n-2)^2+\delta_m^2}\right\}+ + \dfrac{F_{rk}^{(0)}\,F_{rk}^{(1)}}{4\,\delta_r\,\delta_k}$
2	0	$\pm\dfrac{1}{2\sqrt{\delta_r\,\delta_k}}\sum_{m=1}^{N}\dfrac{F_{mr}^{(0)}}{2}\dfrac{F_{mk}^{(0)}}{2}\dfrac{1}{(\delta_k-1)^2-\delta_m^2}+ + \dot{\sum_{n=r,k}}\sum_{m=1}^{N}\dfrac{1}{4\,\delta_n}\left(\dfrac{F_{mn}^{(0)}}{2}\right)^2\left\{\dfrac{1}{(\delta_n-1)^2-\delta_m^2}+\dfrac{1}{(\delta_n+1)^2-\delta_m^2}\right\}$
p	0	$+\dot{\sum_{n=r,k}}\sum_{m=1}^{N}\dfrac{1}{2\,p\,\delta_n}\left(\dfrac{F_{mn}^{(0)}}{2}\right)^2\left\{\dfrac{1}{(\delta_n-1)^2-\delta_m^2}+\dfrac{1}{(\delta_n+1)^2-\delta_m^2}\right\}$

Anmerkungen: 1. $\delta_0 = \dfrac{\delta_r+\delta_k}{p}$: Fußpunkt des Bereiches p-ter Ordnung.

2. $\dot{\sum_{m=r,k}}$: Summation nur über r und k.
3. Grenzkurvenentwicklungen für Bereiche erster Art in den Formeln enthalten, wenn $r = k$ gesetzt wird.
4. Bezeichnungen wie in Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418 mit Ausnahme von: δ_0 statt, ω_0, N statt n.

Man entnimmt dem Rechenverfahren und den Formeln der Tabelle 5, daß sich für einen Bereich p-ter Ordnung die Entwicklungen (37) seiner beiden Grenzkurven erst in den Koeffizienten $\delta_G^{(p)}$ unterscheiden. Demnach haben die Bereiche erster Ordnung schon zwei verschiedene $\delta_G^{(1)}$, die Bereiche zweiter Ordnung zwei verschiedene $\delta_G^{(2)}$, was in der Tabelle 5 durch die Doppelvorzeichen kenntlich ist. Die Bereiche dritter Ordnung unterscheiden sich erst in den Koeffizienten $\delta_G^{(3)}$ und so fort.

Ferner deutet sich in der Formelzusammenstellung der Tabelle 5 eine weitere Tatsache an, welche in der allgemeinen Theorie eine große Rolle spielt und worauf auch in Abschnitt 5 noch besonders eingegangen werden wird. Die Entwicklungen dieser Störungstheorie versagen nämlich, wenn zwischen den Biegeeigenfrequenzen δ_k und δ_r und dem Fußpunkt eines Instabilitätsbereiches δ_0 eine Beziehung

$$(\delta_k \pm p\,\delta_0)^2 - \delta_r^2 = 0 \qquad (p \leqq 0, \text{ ganz})$$

besteht. Es muß also ausdrücklich verlangt werden, daß keine Eigenfrequenz ein ganzzahlig Vielfaches einer anderen ist. Dieser Sonderfall kann beim Stab ohne ruhende Vorlast nicht eintreten.

Beim Stab mit Vorlast kann dagegen bei geeigneter Wahl der ruhenden Last dieser Ausnahmefall vorkommen und soll dann mit anderen Methoden in gewissem Umfange gelöst werden.

Ein weiteres Ergebnis aus der allgemeinen Theorie gestattet die Berechnung des Maximums der Imaginärteile der charakteristischen Exponenten. Die Formel soll für Bereiche erster Art erster Ordnung ($\delta_0 = 2\,\delta_r$) schon hier angegeben werden, da sie später wichtig wird:

$$|Im\,\varrho_r|_{max} = \frac{|F_{rr}^{(0)}|}{8\,\delta_r^2}\,\varepsilon + 0\,\varepsilon^2\,. \tag{38}$$

b) Stab ohne Vorlast. Resonanzverhältnis klein (vereinfachte Theorie). Für extrem schlanke Stäbe ($\lambda \to \infty$) erhält man durch den Wegfall der Resonanzbedingung sehr vereinfachte Formeln. Zufolge (31) verschwinden für $\lambda \to \infty$ sämtliche $F_{mi}^{(j)}$ für $j \geq 1$ und $F_{mi}^{(0)}$ ist durch (26) gegeben. Die numerische Rechnung ist daher vollständig unabhängig von den speziellen Daten des Stabes und läßt sich in den durch (12) und (13) eingeführten Parametern δ und ε ganz allgemein durchführen.

Da über die Konvergenz des Rechenverfahrens[1] hinsichtlich der für eine brauchbare Näherung notwendigen Zahl der Ansatzglieder N und der noch zu berücksichtigenden Potenzen von ε allgemein keine Aussagen gemacht werden können, ist zunächst das Konvergenzverhalten in einem Zahlenbeispiel erprobt worden. Hierfür wurde der Instabilitätsbereich erster Art erster Ordnung gewählt, für welchen also die Anregungsfrequenz in der Nähe der doppelten ersten Eigenfrequenz der Biegeschwingung liegt. Dabei wurden bis zu 6 Differentialgleichungen entsprechend einem 6gliedrigen Ansatz aufgelöst. Da das Gleichungssystem allein den symmetrischen Schwingungsformen zugeordnet ist, hat man so die 11. Eigenschwingungsform berücksichtigt. Während die Hinzunahme weiterer Gleichungen keinen großen Aufwand erfordert, ist die Ausdehnung der Rechnung auf höhere Potenzen von ε mit vergleichsweise viel größeren rechnerischen Schwierigkeiten verbunden, so daß die Rechnung nur bis zu Gliedern ε^3 getrieben wurde. Das Ergebnis ist der Tabelle 6 zu entnehmen. Man erkennt, daß man sich im Rahmen einer durch die verein-

Tabelle 6.

Bereich 1. Art 1. Ordnung: $\delta_0 = 2\,\delta_1$	N	$\delta_G = 2\delta_1 \cdot$	$[1$	$+\delta_G^{(1)}/2\delta_1 \cdot \varepsilon$	$+\delta_G^{(2)}/2\delta_1 \cdot \varepsilon^2$	$+\delta_G^{(3)}/2\delta_1 \cdot \varepsilon^3$	$+0\,\varepsilon^4]$
Vereinfachte Theorie: $\eta = 0\ (\lambda = \infty)$ Stab ohne Vorlast: $P_0 = 0\ (\alpha = 0)$	1	$\delta_G = 44{,}7458 \cdot$	$\Big[1$	$\mp 0{,}24266\varepsilon$	$-0{,}01472\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00090\,\varepsilon^3$	$+0\,\varepsilon^4\Big]$
	2				$-0{,}02097\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00053\,\varepsilon^3$	
	3				$-0{,}02149\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00046\,\varepsilon^3$	
	4				$-0{,}02158\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00046\,\varepsilon^3$	
	5				$-0{,}02160\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00046\,\varepsilon^3$	
	6				$-0{,}02161\,\varepsilon^2$	$\pm 0{,}00046\,\varepsilon^3$	

Tabelle 7. *Zu* $\delta_1 = 22{,}3729$ *und* $\delta_3 = 120{,}9032$ (*symmetrische Schwingungsformen*) *gehörend.*

P	r / k	δ_0	δ_0/δ_0	$\delta_G^{(1)}/\delta_0$	$\delta_G^{(2)}/\delta_0$	$\delta_G^{(3)}/\delta_0$	δ_0	δ_0/δ_0	$\delta_G^{(1)}/\delta_0$	$\delta_G^{(2)}/\delta_0$	$\delta_G^{(3)}/\delta_0$
1	1	44,7458	1	$\mp 0{,}24266$	$-0{,}02097$	$\pm 0{,}00053$	143,2761	1	$\pm 0{,}02577$	$-0{,}00497$	
	3	241,8664	1	$\mp 0{,}06678$	$-0{,}00103$						
2	1	22,3729	1	0	$-0{,}20424$ $+0{,}03633$		71,6381	1	0	$-0{,}00000$	
	3	120,9032	1	0	$-0{,}01989$ $+0{,}00299$					$+0{,}00176$	
3	1	14,9153	1	0	$-0{,}07156$	$\pm 0{,}07476$	47,7587	1	0	$+0{,}06136$	$\mp 0{,}00775$
	3	80,6025	1	0	$-0{,}00387$	$\pm 0{,}00162$					
4	1	11,1865	1	0	$-0{,}06808$	0	35,8190	1	0	$-0{,}03015$	0
	3	60,4516	1	0	$-0{,}00432$	0					
		1. Art					2. Art				

Grenzkurvenentwicklungen $\delta_G = \delta_0\left[1 + \frac{\delta_G^{(1)}}{\delta_0}\,\varepsilon + \frac{\delta_G^{(2)}}{\delta_0}\,\varepsilon^2 + \frac{\delta_G^{(3)}}{\delta_0}\,\varepsilon^3 + \cdots\right]$ $\quad (\eta = 0,\ N = 2)$.

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162, III. Abschnitt.

fachte Theorie gerechtfertigten Näherungslösung durchweg auf zwei Ansatzglieder und auf in ε quadratische Glieder beschränken kann. In dieser Näherung wurden die Resonanzbereiche erster und zweiter Art für die Ordnungszahlen $p = 1$ bis 4 für die ersten beiden symmetrischen und antimetrischen Schwingungsformen berechnet. Vermutlich sind diese Formeln bis etwa $\varepsilon = 0{,}5$ brauchbar, während in der Praxis wohl kaum Werte über 0,1 vorkommen dürften. Das zahlenmäßige Ergebnis ist in den Tabellen 7 und 8 enthalten und die Grenzkurven sind in Abb. 3 in

Tabelle 8.

Zu $\delta_2 = 61{,}6728$ *und* $\delta_4 = 199{,}8596$ (*antimetrische Schwingungsformen*) *gehörend.*

p	r / k	δ_0	δ_0/δ_0	$\delta_G^{(1)}/\delta_0$	$\delta_G^{(2}/\delta_0$	$\delta_G^{(3)}/\delta_0$	δ_0	δ_0/δ_0	$\delta_G^{(1)}/\delta_0$	$\delta_G^{(2)}/\delta_0$	$\delta_G^{(3)}/\delta_0$
1	2	123,3455	1	$\mp$0,11949	—0,00659		261,5323	1	$\mp$0,01165	—0,00147	
	4	399,7191	1	$\mp$0,04240	—0,00040						
2	2	61,6727	1	0	—0,04896 +0,00891		130,7622	1	0	+0,03765	
	4	199,8596	1	0	—0,02818 +0,00498					+0,01815	
3	2	41,1154	1	0	—0,01614	$\mp$0,00888	87,1766	1	0	—0,00833	$\mp$0,00015
	4	133,2404	1	0	—0,00090	$\mp$0,00028					
4	2	30,8364	1	0	—0,01437	0	65,3831	1	0	—0,00624	0
	4	99,9298	1	0	—0,00167	0					
		1. Art					2. Art				

Grenzkurvenentwicklungen $\delta_G = \delta_0 \left[1 + \frac{\delta_G^{(1)}}{\delta_0}\,\varepsilon + \frac{\delta_G^{(2)}}{\delta_0}\,\varepsilon^2 + \frac{\delta_G^{(3)}}{\delta_0}\,\varepsilon^3 + \cdots\right]$ $(\eta = 0,\ N = 2)$.

der (δ, ε)-Ebene aufgetragen. Man entnimmt dieser Auftragung anschaulich, daß in der Technik wohl nur die Bereiche erster Ordnung Bedeutung haben werden, da die Bereiche höherer Ordnung $(p > 1)$ infolge ihrer geringen Frequenzbreite durch die nicht erfaßte Dämpfung vermutlich ausgelöscht werden. Weiter entnimmt man der Anschauung, daß die Bereiche erster Ordnung beider Arten hinreichend genau durch das lineare Glied in der Grenzkurvenentwicklung $\delta_G(\varepsilon)$ formelmäßig dargestellt werden können. Ferner ist auffällig, daß offenbar die Frequenzbreite der Bereiche erster Art bei Übergang zu Bereichen in der Nähe der zweifachen höheren Eigenfrequenzen zunimmt. Im gleichen Sinne nehmen die Bereiche zweiter Art offenbar ab. Dies Verhalten erscheint einer näheren Betrachtung wert.

Die Beschränkung auf das lineare Glied ist für $p = 1$ und für $\varepsilon \ll$ ausreichend:

$$\delta_G \approx \delta_0 + \delta_G^{(1)}\,\varepsilon\,.$$

Dann kann man für δ_G eine sehr einfache Näherungsformel finden. Mit

$$\delta_G^{(1)} = \pm\,\frac{2\,\pi^2\,\psi_{ii}}{\delta_i}$$

und den in Abschnitt 3b)α) eingeführten Näherungen

$$\psi_{ii} \approx r_i^2 - 2\,r_i\,, \qquad r_i \approx \frac{\pi}{2}\,(2\,i + 1)$$

wird genähert für Bereiche erster Art erster Ordnung der i-ten Eigenfrequenz

$$\delta_G \approx \delta_0 \pm \left[2\,\pi^2 - \frac{8\,\pi}{2\,i + 1}\right]\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots)\,.$$

Damit ist auch eine Aussage über den halben Öffnungswinkel x_i des Bereiches in dieser Näherung gewonnen, denn der Faktor von ε ist gleich $\operatorname{tg}\frac{x_i}{2}$ (Abb. 4). Demnach wachsen die Öffnungswinkel der Bereiche erster Art und erster Ordnung mit höheren Eigenfrequenzen an, um dann aber schnell dem Grenzwert $2\,\pi^2$ zuzustreben, wie man auch anschaulich aus der Abb. 3 ersehen

kann. Für die Bereiche zweiter Art und erster Ordnung ($\delta_r + \delta_k = \delta_0$) ist es leicht, eine entsprechende Betrachtung durchzuführen. Mit

$$|F_{rk}| = 4\pi^2 |\psi_{rk}| \approx \frac{4\pi^2 \cdot 8\, r_k^2 r_r^2}{(r_k + r_r)(r_k^2 + r_r^2)} \varepsilon$$

wird für $\varepsilon \to 0$

$$\delta_G \approx \delta_0 \pm \frac{16\pi^2 r_k r_r}{(r_k + r_r)(r_k^2 + r_r^2)} \varepsilon .$$

Die Tangenswerte des halben Öffnungswinkels der Bereiche zweiter Art nehmen also rasch auf den Grenzwert Null hin ab, wenn man zu höheren Schwebungsfrequenzen übergeht, was man auch der Abb. 3 entnehmen kann. Von den zu Vielfachen der Schwebungsfrequenz

$$\delta_0 = \delta_r + \delta_k$$

gehörenden Bereichen haben also nur diejenigen praktische Bedeutung, welche den tiefsten Eigenfrequenzen zugeordnet sind, da ihre Frequenzbreite schnell abnimmt.

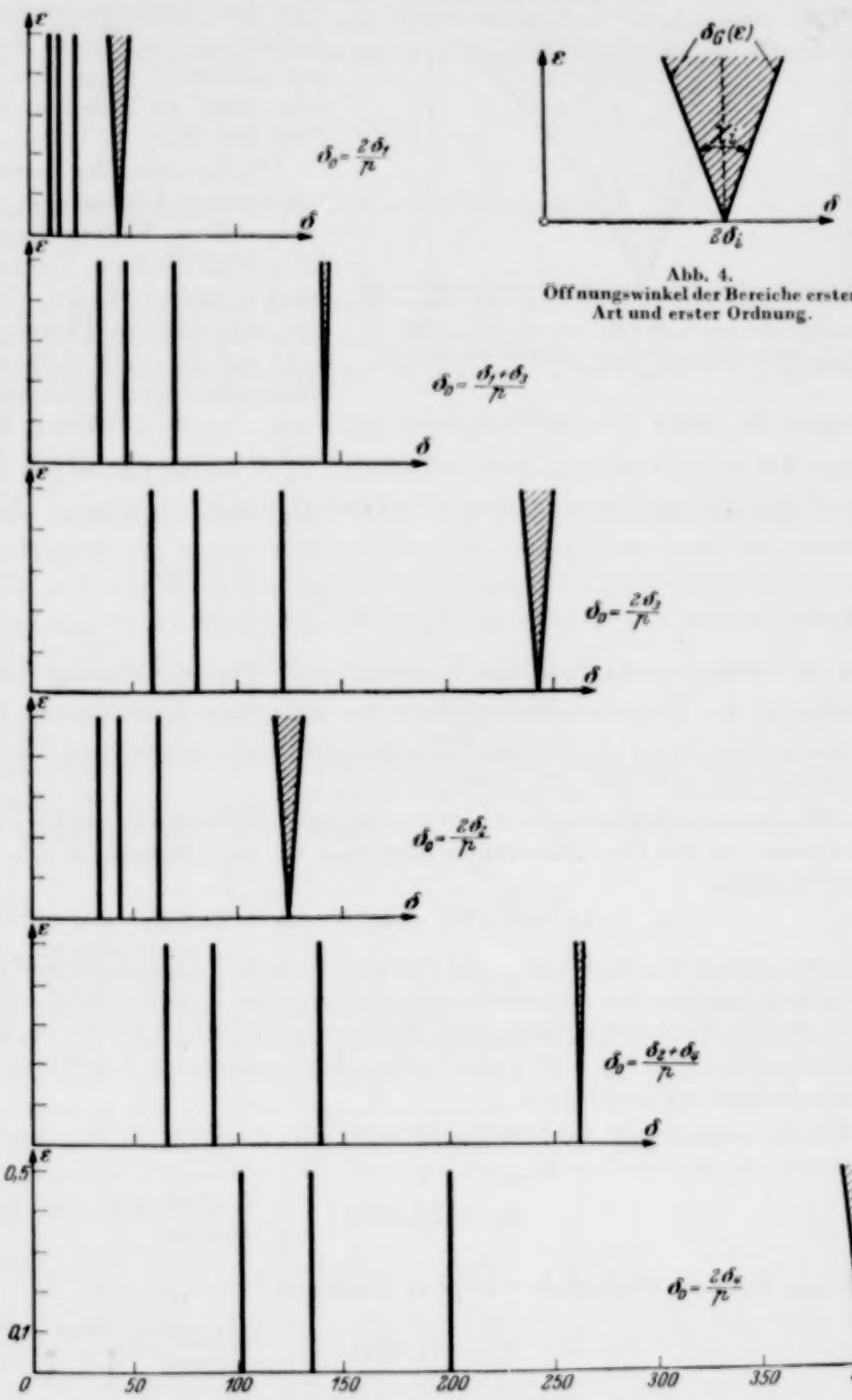

Abb. 3. Instabilitätsbereiche beider Arten bis zur vierten Ordnung für die ersten vier Frequenzen.

Abb. 4. Öffnungswinkel der Bereiche erster Art und erster Ordnung.

Aber auch die Bereiche erster Art erster Ordnung in der Nähe von $\delta_0 = 2\,\delta_i$ dürften nur für die tiefsten Frequenzen oder sogar nur für die erste Eigenfrequenz in der Technik wichtig sein, denn die Instabilität wird in den Bereichen höherer Ordnung sehr viel schwächer. Das kann rechnerisch verfolgt werden, denn das Maß der Instabilität ist durch den Imaginärteil des charakteristischen Exponenten bestimmt. Mit (38) findet man für den Betrag des hier in Betracht kommenden charakteristischen Exponenten in linearer Näherung für $\varepsilon \ll$

$$|Im\, \varrho_i|_{max} \approx \frac{4\pi^2 \psi_{ii}}{8\,\delta_i^2} \varepsilon \approx$$

$$\approx \frac{\pi^2}{2} \frac{r_i^2 - 2 r_i}{r_i^4} \varepsilon \approx \frac{2}{(2i+1)^2}$$

$$\left(1 - \frac{4}{\pi(2i+1)}\right) \varepsilon . \quad (39)$$

Für gleiche Erregerkraft (ε = konst.) wird also $|Im\, \varrho_i|_{max}$ bei Übergang auf höhere Eigenfrequenzen schnell kleiner. Sieht man von dem Einfluß einer etwa vorhandenen Dämpfung ab, so folgt aus (39), daß die Aufschaukelung der Querschwingungen in höheren Instabilitätsbereichen langsamer vor sich geht als in tieferen Bereichen, da $|Im\, \varrho_i|$ mit wachsendem i rasch abnimmt.

Wenn man den Dämpfungseinfluß mit berücksichtigt, so ist der Stabilitätsindex (34) maßgebend. Dieser wird für größere i kleiner und schließlich sogar Null, so daß damit die Dämpfung die Instabilität verringert und schließlich ganz beseitigt. Dies Ergebnis entspricht genau den Eigenschaften gleichermaßen belasteter Stäbe bei freiaufgestützter Lagerung[1].

In Zusammenfassung der Ergebnisse der vereinfachten Theorie kann man sagen, daß technische Bedeutung wohl nur Bereiche erster Ordnung haben werden. Und zwar wahrscheinlich nur diejenigen, welche zu den tiefsten Eigenfrequenzen gehören. In guter Näherung lassen sich die Grenzkurven $\delta_G\,(\varepsilon)$ dieser Bereiche durch in ε lineare Funktionen angeben. Die Bereiche (erster Art) über den doppelten Eigenfrequenzen nehmen bei Übergang zu höheren Eigenfrequenzen an Frequenzbreite schnell auf einen Grenzwert hin zu. Von den Bereichen zweiter Art haben nur diejenigen Bedeutung, welche zu den ersten Schwebungsfrequenzen gehören, denn ihre Frequenzbreite nimmt bei Übergang zu höheren Eigenfrequenzen schnell auf Null hin ab.

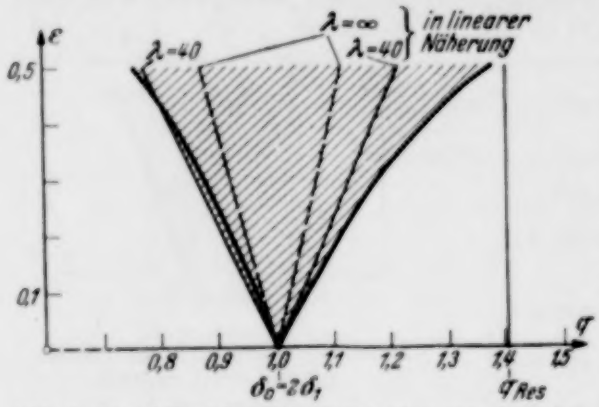

Abb. 5. Instabilitätsbereiche unmittelbar unterhalb der Längsresonanz.

Die Grenzen der Anwendbarkeit dieser vereinfachten Theorie können erst mit Hilfe der Ergebnisse der verschärften Theorie angegeben werden.

c) Stab ohne Vorlast. Resonanzverhältnis nicht mehr klein (verschärfte Theorie). In der verschärften Theorie muß man sich unter Verzicht auf die volle Allgemeinheit auf einen endlichen Schlankheitsgrad λ festlegen. Es wird daher ein Zahlenbeispiel für einen sehr gedrungenen Stab mit $\lambda = 40$ gewählt. Für den wichtigsten Bereich erster Art erster Ordnung ist nach Tabelle 1 $\delta_0 = 44{,}746$ und wegen $\frac{\pi}{2}\,\eta = \frac{\delta_0}{\lambda}$ ist dann in Bereichsmitte das Resonanzverhältnis $\eta = 0{,}712$. Der Resonanzfaktor wird

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\,\eta} = 2{,}289$$

und ist bereits wesentlich von 1 verschieden. Die Berechnung der $\delta_G^{(j)}$ hat nun unter Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit der Kopplungskoeffizienten mit Hilfe der $F_{mi}^{(j)}$ nach (31) zu geschehen. Es ist also bereits $F_{mi}^{(0)}$ gegenüber der vereinfachten Theorie geändert, wie man durch Vergleich von (31) mit (26) sieht.

Mit einem zweigliedrigen Ansatz sind einige Resonanzbereiche berechnet worden. Besonders interessant ist die Grenzkurvenentwicklung für den Bereich in der Nähe der doppelten tiefsten Eigenfrequenz

$$\delta_G = 44{,}7458\,(1 \mp 0{,}44799\,\varepsilon + 0{,}29874\,\varepsilon^2 \mp 0{,}71341\,\varepsilon^3 + \cdots)\,.$$

Diese Grenzkurven in der (δ, ε)-Ebene sind in Abb. 5 dargestellt und die Ausweitung des Bereiches zur nahe benachbarten Resonanzstelle hin ist in die Augen fallend. Allerdings ist die Konvergenzfrage für den Fall einer derartigen Resonanznähe sehr kritisch zu beurteilen, wie man aus dem Anwachsen der Koeffizienten sieht. Man kann daher den Ergebnissen nur eingeschränkt quantitative Bedeutung beimessen.

Ferner zeigen zwei weitere Zahlenbeispiele, nämlich für den Bereich erster Art zweiter Ordnung

$$\delta_G = 22{,}3729\left(1 \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 0{,}25590 \\ 0{,}04520 \end{matrix} \varepsilon^2 + \cdots\right) \qquad \left(\delta_0 = \frac{2\,\delta_1}{2}\right)$$

und den Bereich zweiter Art zweiter Ordnung:

$$\delta_G = 71{,}6381\left(1 \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} 0{,}01523 \\ 0{,}00763 \end{matrix} \varepsilon^2 + \cdots\right) \qquad \left(\delta_0 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}\right),$$

daß auch für $\eta \neq 0$ die Bereiche höherer Ordnung keine nennenswerte Frequenzbreite besitzen und daher auch kaum von praktischem Interesse sind.

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 162.

Da man bei technischen Fragestellungen die pulsierende Lastamplitude höchstens auf etwa 10% der Knicklast anwachsen lassen wird, so kann man sich auf $\varepsilon \leq 0{,}1$ beschränken[1]. Dann können die Grenzkurven der praktisch wichtigsten Bereiche erster Art erster Ordnung wieder durch eine in ε lineare Funktion hinreichend genau angegeben werden:

$$\delta_G \approx \delta_0 + \delta_G^{(1)}\,\varepsilon \qquad (\varepsilon \leq 0{,}1)\,.$$

Hierin ist $\delta_G^{(1)}$ aus der Tabelle 5 zu entnehmen. Bei nicht zu hohen Genauigkeitsansprüchen darf man für γ_{ii}/ψ_{ii} bereits für kleine i den Grenzwert 1/3 nehmen und erhält damit

$$\delta_G^{(1)} \approx \frac{2\,\pi^2\,\psi_{ii}}{\delta_i}\left(\frac{2}{3\cos\delta_0/\lambda} + \frac{1}{3}\right).$$

In dieser Näherung läßt sich die vereinfachte Theorie mit der verschärften vergleichen. Dabei bezeichne der angefügte Stern * im weiteren die Ergebnisse der verschärften Theorie. Dann ist

$$\left|\frac{\delta_G^{*(1)}}{\delta_G^{(1)}}\right| \approx \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\cos\dfrac{\pi}{2}\,\eta}\right) \qquad (\eta \leq 1)\,,$$

und für unterkritische Anregungsfrequenzen ($\eta \leq 1$) und $\varepsilon \to 0$ ist stets:

$$\left|\,\delta_G^{*(1)}\right| \geq \left|\,\delta_G^{(1)}\right|.$$

Die Abgrenzung beider Theorien gegeneinander läßt sich auch zahlenmäßig weiter verfolgen. Läßt man zu, daß sich die Resultate der verschärften und der vereinfachten Theorie um höchstens x% von $\delta_G^{(1)}$ unterscheiden, so ist damit für das Resonanzverhältnis eine obere Schranke gegeben:

$x =$	1	5	10%
$\eta \leq$	0,110	0,246	0,349.

Da $\dfrac{\pi}{2}\,\eta = \dfrac{\delta_0}{\lambda}$ ist und bei Bereichen erster Art erster Ordnung außerdem $\delta_0 = 2\,\delta_i$ festliegt, kann man angeben, bis zu welchen Werten des Schlankheitsgrades λ es zulässig ist, nach der vereinfachten Theorie zu rechnen. Ist z. B. für $\delta_G^{(1)}$ eine Abweichung bis zu 10% gegenüber der strengeren Theorie zulässig, so muß der Schlankheitsgrad oberhalb einer gewissen Grenze liegen:

$$\lambda_i \leq \frac{2\,\delta_i}{\dfrac{\pi}{2}\cdot 0{,}349}\,.$$

Da die Eigenfrequenzen des Stabes ohne Vorlast festliegen, sind die zulässigen Schlankheitsgrade λ_i abhängig von der $i$ten Eigenfrequenz angebbar. So muß für die Berechnung des Resonanzbereiches erster Art erster Ordnung in der Nähe von $\delta_0 = 2\,\delta_i$ nach der vereinfachten Theorie

$$\lambda_1 \geq 81{,}61\,, \qquad \lambda_2 \geq 224{,}96\,, \qquad \lambda_3 \geq 441{,}01\,\ldots,$$

sein, wenn 10% Abweichung zugelassen sind.

Will man also auch nur die zweite Eigenfrequenz δ_2 in die Rechnung einbeziehen, so ist die vereinfachte Theorie schon auf extrem schlanke Stäbe beschränkt. Um für technische Stäbe die Bereiche auch zahlenmäßig richtig zu erfassen, ist man gezwungen, die verschärfte Theorie heranzuziehen. Da jedoch in der Technik ε wie erwähnt sehr klein sein wird und wohl auch nur die Bereiche Bedeutung haben, welche zu den tiefsten Eigenfrequenzen gehören, kann man sich mit Näherungsformeln schnell einen Überblick verschaffen. Die Näherungsgleichungen des Abschnitt b) lassen sich leicht auf den vorliegenden Fall hin ergänzen. Man findet so für Bereiche erster Art erster Ordnung bei sehr kleinem ε

$$\delta_G \approx \delta_0 \pm \left[2\,\pi^2 - \frac{8\,\pi}{2\,i+1}\right]\left(\frac{2}{3\cos\delta_0/\lambda} + \frac{1}{3}\right)\varepsilon \qquad \text{mit} \qquad \frac{\delta_0}{\lambda} \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Für Bereiche zweiter Art kann man mit

$$\delta_G^{(1)} = \pm\,\frac{2\,\pi^2}{\sqrt{\delta_m\,\delta_i}}\left(\frac{\psi_{mi} - \gamma_{mi}}{\cos\,\delta_0/\lambda} + \gamma_{mi}\right)$$

eine entsprechende Näherungsbeziehung aufstellen. Die ψ_{mi}, γ_{mi} und δ_i sind zwar unabhängig

[1] Vgl. die Fußnote 1 und 2 von S. 162.

von den speziellen Stababmessungen, sind aber nicht so einfach durch die Ordnungszahlen m, i auszudrücken, sondern ihre Zahlwerte müssen jeweils aus den Tabellen 1 und 2 entnommen werden. Beispielsweise gilt für den wohl wichtigsten Bereich zweiter Art in der Nähe der Schwebungsfrequenz $\delta_0 = \delta_1 + \delta_3$

$$\delta_G \approx \delta_0 \pm \frac{2\,\pi^2}{\sqrt{\delta_1\,\delta_3}}\left(\frac{8{,}22}{\cos\,\delta_0/\lambda} + 1{,}51\right)\varepsilon \quad \text{mit} \quad \delta_1 = 22{,}373, \quad \delta_3 = 120{,}903\,.$$

Diese Formel ist allerdings wie alle übrigen der verschärften Theorie nur gültig für $\frac{\delta_0}{\lambda} \leq \frac{\pi}{2}$. Das bedeutet wegen $\delta_0 = 143{,}27$, daß $\lambda \geq 100$ sein muß, womit hier immer noch verhältnismäßig schlanke Stäbe vorausgesetzt werden. Daraus kann überhaupt der bemerkenswerte Schluß gezogen werden, daß Instabilitätsbereiche zweiter Art nur bei schlanken Stäben in die Betrachtungen eingeschlossen werden müssen, solange jedenfalls die Anregungsfrequenz ω unter der ersten Resonanzfrequenz der Längsschwingungen bleibt. In Abschnitt 5 wird außerdem noch an Zahlenbeispielen gezeigt, daß der für die Stärke der Instabilität maßgebende charakteristische Exponent in Bereichen zweiter Art wesentlich kleiner ist als in Bereichen erster Art. Daher haben auch aus diesem Grunde die Bereiche zweiter Art wohl sehr viel geringere Bedeutung.

In der verschärften Theorie entkoppeln sich die Stabilitätsgleichungen, welche von geraden und ungeraden Ansatzfunktionen herrühren, nicht mehr. Als Folge davon treten Instabilitätsbereiche über den Schwebungsfrequenzen zwischen Eigenfrequenzen von geraden und ungeraden Schwingungsformen auf. Hierfür wird in Abschnitt 5 ein Zahlenbeispiel gegeben, woraus man ersehen kann, daß Besonderheiten gegenüber den bisher betrachteten Bereichen zweiter Art nicht auftreten.

d) Bemerkungen zu dem Stab mit Vorlast. Wenn eine ruhende Vorlast ($P_0 \neq 0$) vorhanden ist, so ändern sich die Gleichungskoeffizienten von (25) mit dem Parameter α. Wie jedoch ein Vergleich der Tabelle 1 und 2 für $\alpha = 0$ mit den Tabellen 3 und 4 für $\alpha = 3{,}1119$ zeigt, ist der Einfluß von α auf ψ_{mi} und γ_{mi} und damit auf F_{mi} ziemlich gering. Dies ist um so bemerkenswerter, als zufolge

$$2\,\alpha^2 = \frac{4\,\pi^2\,P_0}{P_E}$$

die Vorlast P_0 mit fast der Hälfte der Knicklast sehr hoch gewählt ist. Lediglich die Eigenfrequenzen δ_i des gedrückten Stabes sinken grundsätzlich mit wachsender Vorlast (wachsendem α), wie man auch aus Tabelle 1 und 4 ablesen kann.

Beschränkt man sich für eine Näherungsbetrachtung wieder auf das in ε lineare Glied von δ_G und außerdem auf Bereiche erster Ordnung, so ändert sich mit wachsendem α der Koeffizient $\delta_G^{(1)} = \pm \frac{F_{mi}^{(1)}}{2\sqrt{\delta_m\,\delta_i}}$ im wesentlichen nur mit dem Nenner $\sqrt{\delta_m\,\delta_i}$. Daraus folgt z. B. für den ersten Bereich erster Art erster Ordnung nach Tabelle 2 und 3

$$\left|\frac{\delta_G^{(1)}\,\big|_{\alpha=3{,}119}}{\delta_G^{(1)}\,\big|_{\alpha=0}}\right| \approx \frac{\delta_1\,\big|_{\alpha=0}}{\delta_1\,\big|_{\alpha=3{,}119}} = \frac{22{,}4}{16{,}1}\,.$$

Allgemein geht aus dieser Betrachtung hervor, daß die Instabilitätsbereiche erster Ordnung eines Stabes mit Vorlast größer sind als die eines nicht gedrückten Stabes, was vermutlich auch für die Bereiche höherer Ordnung gilt.

5. Beantwortung der Stabilitätsfrage mit der Determinantentheorie. Man kann die Stabilitätsfrage aus den Gleichungen (25) heraus noch auf etwas anderem Wege als bisher beantworten und dabei auch die Dämpfung in die Rechnung einbeziehen. Man muß dann den Stabilitätsindex (34) unmittelbar berechnen, um über Stabilität oder Instabilität entscheiden zu können. Die wesentliche Aufgabe ist also die Bestimmung der charakteristischen Exponenten ϱ_m abhängig von den Parametern δ und ε. Im weiteren soll daher ein Rechenverfahren entwickelt werden, mit welchem man unmittelbar den Zahlenwert der charakteristischen Exponenten ϱ_m ($m = 1, \ldots, N$) für jeden Punkt der (δ, ε)-Ebene finden kann. Die Kleinheit des Parameters ε wird dabei nach wie vor vorausgesetzt. Im weiteren wird jedoch der in der Störungstheorie hinsichtlich der Eigenfrequenzen ausgeschlossene Sonderfall $\delta_r = p\,\delta_k$ (p ganz) in die Rechnung aufgenommen. Schließlich scheint es ferner lohnenswert, einige wesentliche Ergebnisse der allgemeinen Theorie auf diesem Wege zu bestätigen.

a) Ausgangsgleichungen der Determinantentheorie. Zur Berechnung der charakteristischen Exponenten von (25) soll die Theorie der unendlichen Determinanten von *H. v. Koch*[1] angewandt werden. *H. v. Koch* verwendet seine Theorie zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und behandelt als Beispiel eine Differentialgleichung, welche die *Mathieu*-Gleichung als Sonderfall enthält. An dieses Beispiel wird in ähnlicher Weise angeknüpft, wie es *G. Lemaitre-O. Godart*[2], *E. Lamla*[3] und *J. O. Fleckenstein*[4] bei ihren Arbeiten über *Hill*sche Systeme getan haben.

Dividiert man (25) durch δ^2 und setzt zur Abkürzung

$$q_i = \frac{\delta_i}{\delta},$$

so lautet das Differentialgleichungssystem

$$T_i'' + q_i^2 T_i - \varepsilon \cos s \sum_{i'=1}^{N} \frac{F_{ii'}}{\delta^2} T_{i'} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Macht man ferner für eine partikuläre Lösung nach (33) den Ansatz

$$T_{i'} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{i'\nu}\, e^{-\mathfrak{i}(\nu+\varrho)}$$

und führt diesen in das Differentialgleichungssystem ein, so findet man für die Entwicklungskoeffizienten $c_{i'\nu}$ das unendliche Gleichungssystem:

$$c_{i\nu} - \sum_{i'=1}^{N} \frac{F_{ii'}\varepsilon}{2\delta^2} \frac{1}{q_i^2 - (\nu+\varrho)^2} (c_{i',\nu-1} + c_{i',\nu+1}) = 0 \quad \begin{cases} (i = 1, \ldots, N) \\ (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty). \end{cases}$$

Die unendliche Determinante dieser homogenen Gleichungen ist eine Normaldeterminante. Sie muß für eine nichttriviale Lösung verschwinden und liefert so die Bestimmungsgleichung für N charakteristische Exponenten, wie sich zeigen wird. Die Elemente der Determinante werden zweckmäßig im Anschluß an *G. Lemaitre-O. Godart*[2] wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} B_{N\cdot\nu+i,\,N\cdot\nu+i} &= 1 && \left| \begin{array}{l} (i, i' = 1, 2, \ldots, N) \\ \\ (\nu, \nu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty). \end{array} \right. \\ B_{N\cdot\nu+i,\,N\cdot\nu'+i'} &= \frac{-\frac{\varepsilon F_{ii'}}{2\delta^2}\, e_{1,\,|\nu-\nu'|}}{q_i^2 - (\nu+\varrho)^2} && \end{aligned} \qquad (40)$$

Zur Erläuterung dieser Bezeichnungen ist in Abb. 6 ein Ausschnitt der Determinante für $N = 2$ schematisch wiedergegeben. Außer den Hauptdiagonalelementen vom Betrage 1 sind nur noch wenige Elemente vorhanden (durch x bezeichnet).

α) *Aufsuchung der analytischen Eigenschaften der Determinante.* Wegen

$$B_{N\nu+i,\,N\nu'+i'}(\varrho+1) = B_{N(\nu-1)+i,\,N(\nu'-1)+i'}(\varrho),$$

und weil es gleichgültig ist, welches Element man als Ursprungselement einer unendlichen Determinante ansieht, ist die Determinante eine periodische Funktion der Periode 1:

$$\Delta(\varrho+1) = \Delta(\varrho).$$

Die Funktion $\Delta(\varrho)$ hat Pole an den Stellen

$$\varrho = \pm q_i + n \qquad \left(n \gtrless 0, \text{ ganz}, \; i = 1, \ldots, N\right),$$

wie man aus den verschwindenden Nennern von (40) ersieht. Je nach der Vielfachheit dieser Pole werden einige Fälle getrennt untersucht.

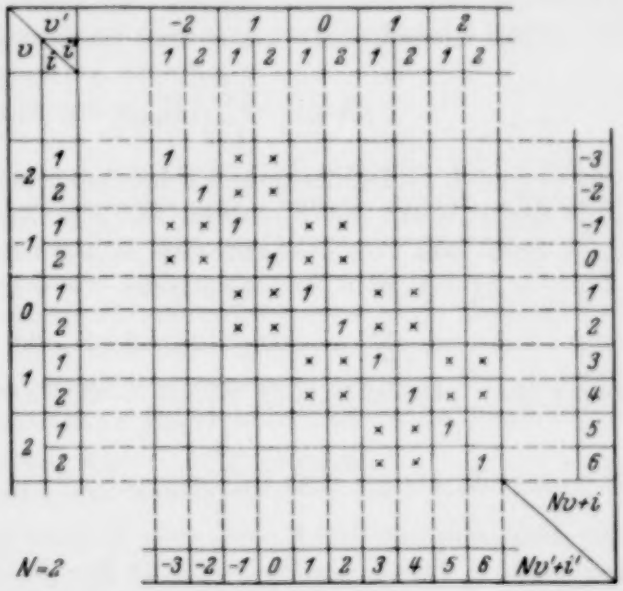

Abb. 6. Determinantenausschnitt zur Erläuterung der Bezeichnungen.

[1] *H. v. Koch*, Acta mathematica 16 (1892—93), S. 217, lehrbuchmäßig dargestellt bei *A. R. Forsyth*, Theory of Differential Equations, Part. III, Vol. IV, S. 348. Cambridge 1902.
[2] *G. Lemaitre-O. Godart*, Bull. Classe Sc. 5e Ser. Tome 24. Acad. Roy. Belgique Bruxelles 1938, S. 19.
[3] *E. Lamla*, J. reine angew. Math. (Crelle) 179 (1938), S. 134.
[4] *J. O. Fleckenstein*, Comment. Math. Helv. 15 (1943), S. 367.

1. Einfache Pole (Residuen). Wenn alle q_i voneinander verschieden sind und sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so sind alle Pole einfach. Für jedes beliebige Ziffernpaar r, k muß dann

$$q_r \pm q_k \neq p \qquad p \gtrless 0 \text{ ganz}$$

sein.

2. Zweifache Pole. Wenn

$$\text{I. } q_r + q_k = p \quad \text{oder} \quad \text{II. } q_r - q_k = p \tag{41}$$

für ein Zeigerpaar r, k ist, so fallen die Pole

$$\begin{aligned} \text{I. } &\pm q_r + n_r \quad \text{mit den Polen} \quad \mp q_k + n_k \\ \text{oder II. } &\mp q_r + n_r \quad \text{mit den Polen} \quad \mp q_k + n_k \end{aligned} \qquad (n_r, n_k, n_r' \lesseqgtr 0, \text{ ganz})$$

zusammen und es treten also jeweils zweifache Pole auf. Falls in I. $r = k$, so ist $q_r = p/2$. Auch hier treten Pole zweiter Ordnung auf, weil die Pole $+ q_r + n_r = \frac{p}{2} + n_r$ und $- q_r + n_r' = -\frac{p}{2} + n_r'$ zusammenfallen.

3. Vierfache Pole. Falls zugleich

$$q_r = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad q_r \pm q_k = p' \qquad (p, p', p'', p''' \lesseqgtr 0, \text{ ganz}), \tag{42}$$

so ist auch $q_k = p''/2$. Mithin fallen die Pole $q_r + p$ mit den Polen $- q_r + p'$, $+ q_k + p''$ und $- q_k + p'''$ zusammen. Es tritt daher ein vierfacher Pol auf.

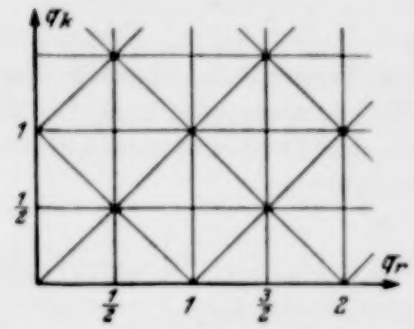

Abb. 7. Diagramm zur Erläuterung der Vielfachheit der Pole.

Es sind weitere Sonderfälle mit Polen noch höherer Ordnung denkbar. Diese sollen jedoch im weiteren ausgeschlossen werden. Dann kann man aus Abb. 7 für ein beliebiges Zeigerpaar r, k die Vielfachheit der Pole von $\Delta(\varrho)$ entnehmen. Ist δ und damit q_r, q_k so gewählt, daß man sich nicht auf einer der Geraden des Diagramms befindet, so hat $\Delta(\varrho)$ nur einfache Pole [vgl. 1.]. Auf einer der Geraden treten Pole zweiter Ordnung auf [vgl. 2.] und im Schnittpunkt zweier Geraden hat $\Delta(\varrho)$ Pole vierter Ordnung [vgl. 3.].

β) Umformung der Determinante in eine rationale Funktion von trigonometrischen Funktionen.

Nach einem Satz der Analysis[1] kann man eine periodische Funktion der Periode 1 durch ctg-Funktionen und deren Ableitungen ausdrücken.

1. Mit diesem Satz kann man in dem Fall einfacher Pole für die Determinante

$$\Delta(\varrho) - \sum_{i=1}^{N} [R_{i1}\, \pi \operatorname{ctg} \pi(\varrho - q_i) + R_{i2}\, \pi \operatorname{ctg} \pi(\varrho + q_i)] = K \tag{43}$$

mit der noch zu bestimmenden Konstanten K ansetzen. Die Funktion der linken Seite hat keine Pole mehr, wenn die Residuen R_{i1}, R_{i2} entsprechend bestimmt sind. Die rechte Seite ist daher nach dem Satz von *Liouville* eine Konstante. Da $\Delta(\varrho)$ eine gerade Funktion in ϱ ist, so verlangt $\Delta(\varrho) - \Delta(-\varrho) = 0$ das identische Verschwinden jedes einzelnen Summanden in (43):

$$[\operatorname{ctg} \pi(\varrho - q_i) + \operatorname{ctg} \pi(\varrho + q_i)]\,(R_{i1} + R_{i2}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Setzt man also einfacher $R_{i1} = -R_{i2} = R_i$, so wird:

$$\Delta(\varrho) = K + \sum_{i=1}^{N} \pi R_i\, [\operatorname{ctg} \pi(\varrho - q_i) - \operatorname{ctg} \pi(\varrho + q_i)] = 0\,.$$

Zur Bestimmung der Konstanten K wird $\varrho = \alpha + i\beta$ gesetzt und der Imaginärteil unbegrenzt vergrößert. Dann verschwinden in der Determinante alle Nichthauptdiagonalelemente und man erhält:

$$\lim_{\beta \to \infty} \Delta(\alpha + i\,\beta) = 1. \tag{44}$$

Da andererseits $\lim_{\beta \to \infty} \operatorname{ctg}(\alpha + i\,\beta) = -i$, so ist damit K bestimmt: $K = 1$. Nach einigen trigono-

[1] *W. F. Osgood*, Lehrbuch der Funktionentheorie, S. 466. Leipzig 1920.

metrischen Umformungen erhält man endlich

$$\Delta(\varrho) = 1 + \sum_{i=1}^{N}{}' \frac{2\pi R_i \sin 2\pi q_i}{\cos 2\pi q_i - \cos 2\pi\varrho}, \tag{45}$$

worin die Koeffizienten R_i unmittelbar die Residuen an den Stellen $\varrho = q_i$ sind. Für die Einzelgleichung ist $N = 1$ und in (45) ist das Ergebnis von *H. v. Koch*[1] enthalten.

2. Die Einbeziehung der Sonderfälle (41) ist für die Beantwortung der Stabilitätsfrage notwendig. Da $\Delta(\varrho)$ nun Pole zweiter Ordnung hat, ist ein entsprechend erweiterter Ansatz erforderlich

$$\Delta(\varrho) = K + \sum_{i=1}^{N}{}' \pi R_i \left[\operatorname{ctg}\pi(\varrho - q_i) - \operatorname{ctg}\pi(\varrho + q_i)\right] + \\ + \pi P_k \left[\frac{d}{d\varrho}\operatorname{ctg}\pi(\varrho - q_k) + \frac{d}{d\varrho}\operatorname{ctg}\pi(\varrho + q_k)\right].$$

Hierin ist bereits berücksichtigt, daß $\Delta(\varrho)$ eine gerade Funktion ist. Durch den Grenzübergang (44) ergibt sich auch hier $K = 1$, wegen $\lim_{\beta\to\infty} \sin^{-2}(\alpha + i\beta) = 0$. Nach ähnlichen Umformungen wie in (45) erhält man

$$\Delta(\varrho) = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N}{}' \frac{2\pi R_i \sin 2\pi q_i}{\cos 2\pi q_i - \cos 2\pi\varrho} - 4\pi^2 P_k \frac{1 - \cos 2\pi q_k \cos 2\pi\varrho}{(\cos 2\pi q_k - \cos 2\pi\varrho)^2}. \tag{46}$$

3. Der Sonderfall (42) soll nur in der speziellen Form behandelt werden, wie er in einem späteren Zahlenbeispiel auftritt. Dort ist

$$q_r = 1/2, \quad q_k = 7/2, \quad q_r + q_k = 4,$$

und man schließt ganz entsprechend wie in den vorigen Abschnitten auf

$$\Delta(\varrho) = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq r \\ \neq k}}^{N}{}' \frac{2\pi R_i \sin 2\pi q_i}{\cos 2\pi q_i - \cos 2\pi\varrho} + \pi P_k \frac{d}{d\varrho}\operatorname{ctg}\pi\left(\varrho - \frac{1}{2}\right) + \pi P_k'' \frac{d^3}{d\varrho^3}\operatorname{ctg}\pi\left(\varrho - \frac{1}{2}\right),$$

worin berücksichtigt ist, daß $\Delta(\varrho)$ eine gerade Funktion ist und die Pole zweiter und vierter Ordnung an den Stellen $+1/2 + n$ und $-1/2 + n$ liegen. Nach einigen Umformungen wird

$$\Delta(\varrho) = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq r,k}}^{N}{}' \frac{2\pi R_i \sin 2\pi q_i}{\cos 2\pi q_i - \cos 2\pi\varrho} - \frac{\pi^2 P_k}{\sin^2\pi\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)} - \frac{2\pi^4 P_k''\left[1 + 2\cos^2\pi\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin^4\pi\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)}. \tag{47}$$

Offenbar sind die charakteristischen Exponenten notwendig aus den Gleichungen $\Delta(\varrho) = 0$ zu bestimmen. Nach (45), (46) und (47) sind dies Gleichungen N-ten Grades in $\cos 2\pi\varrho$, und man erhält mithin N Lösungspaare für die charakteristischen Exponenten

$$+\varrho_m, \quad -\varrho_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, N).$$

Wenn ein oder mehrere ϱ_m einen nicht verschwindenden Imaginärteil haben, besteht nach (34) die Möglichkeit einer unbegrenzt wachsenden Partikularlösung. Ferner treten ebensolche Lösungstypen i. a. auch dann auf, wenn es mehrfache Wurzeln ϱ_m gibt. Dieser Fall kann im weiteren jedoch beiseite gelassen werden[2].

γ) *Bestimmung der Koeffizienten.* Zur zahlenmäßigen Auswertung von (45), (46) und (47) müssen noch die Koeffizienten berechnet werden. Ihre Berechnung ist die Hauptschwierigkeit, und man ist gezwungen, dabei zu einer Näherungsrechnung überzugehen. Zu dem Zweck werden die R_i, P_k und P''_k nach Potenzen des kleinen Parameters ε entwickelt. Diese Entwicklung soll auf Potenzen ε^3 einschließlich beschränkt werden.

Nach *H. v. Koch*[3] gilt für die hier zu betrachtenden Normaldeterminanten ein ähnlicher Entwicklungssatz wie für endliche Determinanten:

$$\Delta = 1 + \sum_{p,q}{}' \begin{vmatrix} 0 & B_{pq} \\ B_{qp} & 0 \end{vmatrix} + \sum_{p,q,r}{}' \begin{vmatrix} 0 & B_{pq} & B_{pr} \\ B_{qp} & 0 & B_{qr} \\ B_{rp} & B_{rq} & 0 \end{vmatrix} + \sum_{p,q,r,s}{}' \begin{vmatrix} \ldots \end{vmatrix} + \ldots \tag{48}$$

mit $p < q < r < \ldots$ ganz.

[1] Vgl. S. 292 der in Fußnote 1 von S. 181 genannten Arbeit.
[2] Vgl. Nr. 6 der in Fußnote 5 von S. 162 genannten Arbeit.
[3] Vgl. Fußnote 1 von S. 181.

Da die Lösungen von (25) unabhängig vom Vorzeichen von ε sein müssen, darf die Entwicklung (48) keine ungeraden Potenzen von ε enthalten. Tatsächlich überzeugt man sich leicht, daß auch die Hauptminoren dritter Ordnung in (48) verschwinden. Bei Beschränkung auf Glieder ε^3 einschließlich, hat man also nur Hauptminoren zweiter Ordnung zu betrachten.

1. Falls keine der Beziehungen (41) und (42) eintritt, gilt die Gleichung (45) und die R_i sind unmittelbar die Residuen:

$$R_i = \lim_{\varrho \to q_i} (\varrho - q_i)\, \Delta(\varrho)\,.$$

Zu ihrer Berechnung hat man also nur diejenigen zweireihigen Hauptminoren aufzusuchen, welche für $\varrho \to q_i$ unendlich werden. Diese sind alle in der aus der Gesamtreihe der Hauptminoren herausgegriffenen Teilsumme

$$-\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}{}' \sum_{j=1}^{N}{}' F_{ij}^2 \left\{ \cdots + \frac{1}{[q_i^2 - \varrho^2]\,[q_j^2 - (\varrho-1)^2]} + \frac{1}{[q_i^2 - \varrho^2]\,[q_j^2 - (\varrho+1)^2]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{[q_i^2 - (\varrho-1)^2]\,[q_j^2 - (\varrho-2)^2]} + \frac{1}{[q_i^2 - (\varrho+1)^2]\,[q_j^2 - (\varrho+2)^2]} + \cdots \right\} \tag{49}$$

enthalten. Die Summanden, welche den Nenner $(\varrho - q_i)$ enthalten, liefern

$$R_i = \frac{\left(\frac{F_{ii}}{2\,\delta^2}\right)^2 \varepsilon^2}{q_i\,(4\,q_i^2 - 1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{N}{}' \left(\frac{F_{ij}}{2\,\delta^2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{2\,q_i} \left[\frac{1}{q_j^2 - (q_i-1)^2} + \frac{1}{q_j^2 - (q_i+1)^2}\right] + 0\,\varepsilon^4\,, \tag{50}$$

worin das Glied $j = i$ seiner überwiegenden Größe wegen aus der Summe herausgezogen wurde. Für die *Mathieu*-Einzelgleichung ($N = 1$) fällt die Summe in (50) weg, und es bleibt nur dieses erste Glied stehen. Es findet sich schon bei *H. v. Koch*[1].

2. Die Berechnung der Koeffizienten für die Fälle (41) ist für $p > 1$ sehr weitläufig. Daher werden im weiteren nur die praktisch wichtigsten Fälle $q_r + q_k = 1$ und $q_r - q_k = 1$ durchgerechnet. Während auch in (46) die R_i wieder die Residuen sind, findet man für die Pole zweiter Ordnung aus (46)

$$\lim_{\varrho \to q_k} (\varrho - q_k)^2\, \Delta(\varrho) = -\,P_k\,.$$

In (49) liefert dann für $q_k + q_r = 1$ der erste Summand $(2\,N - 2)$ Pole erster Ordnung (für $i = k$ o d e r $j = r$) und einen Pol zweiter Ordnung (für $i = k$ u n d $j = r$), der zweite Summand N Pole erster Ordnung (für $i = k$), der dritte Summand N Pole erster Ordnung (für $i = r$) und der vierte Summand, wie alle weiteren nicht hingeschriebenen Summanden der zweireihigen Hauptminoren, überhaupt keine Pole. Also gibt es $(4\,N - 2)$ Summanden in[2]

$$R_k = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq r}}^{N}{}' \frac{+\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{kj}\right)^2}{2\,q_k\,[q_j^2 - (q_k-1)^2]} + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N}{}' \frac{-\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{ir}\right)^2}{2\,q_r\,[q_i^2 - (q_r-1)^2]} + \\ + \sum_{j=1}^{N}{}' \frac{+\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{kj}\right)^2}{2\,q_k\,[q_j^2 - (q_k+1)^2]} + \sum_{j=1}^{N}{}' \frac{-\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{rj}\right)^2}{2\,q_r\,[(q_j^2 - (q_k-2)^2]} + 0\,\varepsilon^4 \tag{51}$$

und einen Summanden

$$P_k = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{rk}\right)^2}{2\,q_k \cdot 2\,(q_k - 1)} + 0\,\varepsilon^4 = -\,\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{rk}\right)^2}{4\,q_k\,q_r} + 0\,\varepsilon^4\,. \tag{52}$$

Wenn dagegen $q_k - q_r = 1$ ist, so findet man entsprechend

$$R_k = \text{const.}\,\varepsilon^2 + 0\,\varepsilon^4 \tag{51'}$$

und

$$P_k = +\,\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2} F_{rk}\right)^2}{4\,q_k\,q_r} + 0\,\varepsilon^4\,. \tag{52'}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 181.

[2] Wegen $(1 - q_k)^2 - (\varrho - 1)^2 = -\,(\varrho - q_k)\,(\varrho + q_k - 2)$.

Wie sich später zeigen wird, ist es bedeutungsvoll, daß (52′) sich im Vorzeichen von (52) unterscheidet. Die genaue Formel von (51′) ist für das Weitere uninteressant und daher nicht angegeben.

3. In einem später zu behandelnden Zahlenbeispiel für den Sonderfall (42) muß nur noch der Koeffizient P_k für den Pol zweiter Ordnung bekannt sein. Den Pol vierter Ordnung kann man außer Ansatz lassen, da seine ε-Potenzentwicklung von P_k'' mit ε^4 beginnt und hier nur Potenzen bis ε^3 berücksichtigt werden. Den Koeffizienten P_k findet man aus (49) durch Betrachtung des Summanden

$$-\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2}F_{kk}\right)^2\frac{1}{[q_k^2-\varrho^2]\;[q_k^2-(\varrho-1)^2]}\,,$$

aus welchem man den Nenner $(\varrho-q_k)^2$ abspalten kann. Mit $q_k=1/2$ ist dann

$$P_k=-\left(\frac{\varepsilon}{2\,\delta^2}F_{kk}\right)^2+0\varepsilon^4\,. \tag{52''}$$

Für die Residuen erhält man ebenso wieder $R_i=\text{const.}\;\varepsilon^2+0\varepsilon^4$, worin die Konstante für das Zahlenbeispiel jedoch nicht weiter benötigt wird.

b) Einige allgemeine Schlüsse.

Mit den Ergebnissen des Abschn. a) lassen sich einige Resultate der allgemeinen Theorie mit Hilfe der Determinantentheorie bestätigen.

Führt man die Abkürzungen

$$z(\varrho)=\cos 2\pi\varrho\,,\qquad z_i=\cos 2\pi q_i\,,\qquad m_i(\varepsilon)=2\pi R_i\sin 2\pi q_i \tag{53}$$

ein, so wird im allgemeinen Falle, wo keine der Beziehungen (41) oder (42) eintritt, die Determinantengleichung (45):

$$\Delta(\varrho)=1+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{z_i-z}=0$$

oder

$$\prod_{i=1}^{N}(z_i-z)+\sum_{i=1}^{N}m_i\prod_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{N^*}(z_j-z)=0\,. \tag{54}$$

Damit der Fall der *Mathieu*-Gleichung in (54) enthalten ist, werde festgesetzt, daß für $N=1$ das letzte Produkt gleich 1 ist, was durch den Stern am Produktzeichen kenntlich sein soll. Für $N=1$ ist dann also $z_1-z+m_1=0$ und eine komplexe Wurzel $z_{(1)}$ kann hierin nicht auftreten, denn z_1 und m_1 sind nur reeller Werte fähig. Die durch komplexes ϱ bedingten Instabilitäten sind wegen (53) bei der *Mathieu*-Gleichung also nur möglich, wenn eine Wurzel $|z_{(1)}|>1$ eintritt. Derartige Instabilitäten heißen solche erster Art.

Ist allgemeiner in (54) $N>1$, so können die Wurzeln $z_{(i)}$ den Betrag 1 für $\varepsilon\to 0$ nur in der Nähe ausgezeichneter Frequenzwerte erreichen oder übersteigen. Da nämlich für $\varepsilon=0$ die m_i verschwinden, hat man

$$|z_{(i)}|=1\quad\text{für}\quad 2\pi q_i=p'\pi\qquad\left(p'\gtrless 0,\ \text{ganz}\right)$$

oder mithin

$$q_i\,(\varepsilon=0)=\frac{\delta_i}{\delta_0}=\frac{p}{2}\qquad(p>0,\ \text{ganz}).$$

Die Möglichkeit solcher Instabilitäten erster Art besteht also für nur in der Nähe der Frequenzen $\delta_0=2\,\delta_i/p$. Daß diese Instabilitäten tatsächlich eintreten, soll wenigstens für den wichtigsten Fall $(p=1)$ $\delta_0=2\,\delta_i$ nachgewiesen werden. Es sei also $q_k=1/2$ und keine der Beziehungen (41) und (42) erfüllt. Dann findet man mit den gleichen Überlegungen wie in Abschn. 5 a) β)

$$\Delta(\varrho)=1+\sum_{\substack{i=1\\ \neq k}}^{N}\frac{m_i}{z_i-z}+\pi P_k\frac{d}{d\varrho}\operatorname{ctg}\pi\left(\varrho-\frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

In (55) ist $\Delta(\varrho)$ bereits als gerade Funktion angesetzt und der letzte Summand liefert die Pole sowohl an den Stellen $\varrho=+\frac{1}{2}+n$ und $\varrho=-\frac{1}{2}+n$. Nach kurzer Zwischenrechnung wird

aus (55) mit den Abkürzungen (53)

$$\Delta(\varrho) = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} \frac{m_i}{z_i - z} - \frac{2\pi^2 P_k}{z + z_k} = 0\,, \tag{56}$$

worin $z_k = 1$ ist. Aus (56) folgt durch Beseitigung der Nenner

$$F = (z_k + z) \prod_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} (z_i - z) + (z_k + z) \sum_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} m_i \prod_{\substack{j=1 \\ \neq i \\ \neq k}}^{N} (z_j - z) - 2\pi^2 P_k \prod_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} (z_i - z) = 0\,. \tag{56'}$$

Für $\varepsilon = 0$ verschwinden die m_i und P_k und es gibt eine Wurzel $z_{(k)}^{(0)} = -z_k = -1$ vom Betrage eins. Diese Wurzel hat für $\varepsilon \neq 0$ einen Betrag > 1, wie mit Hilfe einer *Taylor*reihenentwicklung für $z_{(k)}(\varepsilon)$ durch implizite Differentiation von (56′) gezeigt werden wird. Zunächst findet man, daß in der gesuchten Entwicklung

$$z_{(k)}(\varepsilon) = z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)} + \varepsilon^2 z^{(2)} + \ldots \tag{57}$$

kein lineares Glied enthalten ist, denn in[1]

$$F_\varepsilon + F_z \frac{dz}{d\varepsilon} = 0 \tag{58}$$

ist $(F_\varepsilon)_{\varepsilon=0} = 0$, $(F_z)_{\varepsilon=0} \neq 0$ und mithin $\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = z^{(1)} = 0$.

Demnach hat man in

$$F_{\varepsilon\varepsilon} + 2F_{z\varepsilon}\frac{dz}{d\varepsilon} + F_z\frac{d^2z}{d\varepsilon^2} + F_{zz}\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)^2 = 0 \tag{59}$$

nur $F_{\varepsilon\varepsilon}$ und F_z zu berechnen, um $z^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0}$ zu finden. Es ergibt sich mit $P_k = \bar{P}_k\,\varepsilon^2 + 0\varepsilon^4$:

$$(F_{\varepsilon\varepsilon})_{\substack{\varepsilon=0 \\ z=-z_k}} = -4\pi^2 \bar{P}_k \prod_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} (z_i + z_k)$$

$$(F_z)_{\substack{\varepsilon=0 \\ z=-z_k}} = 1 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ \neq k}}^{N} (z_i + z_k)$$

und daraus $$z^{(2)} = 2\pi^2 \bar{P}_k\,.$$

Da nun (vgl. 52) $$\bar{P}_k = -\left(\frac{F_{kk}}{2\delta^2}\right)^2 + 0\varepsilon^2$$

ist, hat man (in den ursprünglichen Bezeichnungen)

$$\cos 2\pi\varrho_k = -1 - 2\pi^2\left(\frac{F_{kk}}{2\delta^2}\right)^2 \varepsilon^2 + 0\varepsilon^4\,. \tag{60}$$

Da die rechte Seite den Betrag 1 übersteigt, ist der Nachweis der Instabilität für Frequenzen in der Nähe der doppelten Biegeeigenfrequenzen durchgeführt.

Wenn die Anregungsfrequenz δ_0 ein ganzzahliger Bruchteil der Schwebungsfrequenzen

$$\delta_0 = \frac{\delta_r + \delta_k}{p} \quad (41') \quad \text{oder} \quad \delta_0 = \frac{\delta_r - \delta_k}{p} \quad (41'')$$

wird, so besteht die Möglichkeit von Instabilitäten. Nach (46) ist nämlich mit den Abkürzungen (53), wenn man die Nenner beseitigt,

$$\left.\begin{aligned} F = (z_k - z)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N} (z_i - z) + (z_k - z)^2 \sum_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N} m_i \prod_{\substack{j=1 \\ \neq r,i}}^{N} (z_j - z) - \\ - 4\pi^2 P_k (1 - z_k z) \prod_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N} (z_i - z) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

[1] Tiefgestellte Indizes ε und z bezeichnen partielle Ableitungen.

Für $\varepsilon = 0$ gibt es die Doppelwurzel $z_{(k)}^{(0)} = z_k$. Für $\varepsilon \neq 0$ besteht hier die Möglichkeit eines konjugiert komplexen Wurzelpaares und damit ist Instabilität möglich. Aus der Störungstheorie[1] ist bekannt, daß dieser Fall der Instabilität tatsächlich nur in der Nähe der Frequenzen (41′) eintritt. Diese merkwürdige Eigenschaft der Schwebungsfrequenzen soll nochmals mit der Determinantentheorie für den speziellen Fall $p = 1$ mit Hilfe der Entwicklung (57) nachgewiesen werden. Da in (61) $(F_\varepsilon)_{\varepsilon=0} = 0$ und auch $(F_z)_{\varepsilon=0} = 0$ ist, kann man $z^{(1)}$ nicht aus (58) berechnen, sondern muß dazu (59) heranziehen. Da auch $(F_{z\varepsilon})_{\varepsilon=0} = 0$ wird, findet man

$$z^{(1)} = \pm \sqrt{-\left(\frac{F_{\varepsilon\varepsilon}}{F_{zz}}\right)_{\varepsilon=0}},$$

worin

$$(F_{\varepsilon\varepsilon})_{\varepsilon=0} = -4\,\pi^2\,\bar{P}_k\,2(1 - z_k^2) \prod_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N} (z_i - z_k)$$

und

$$(F_{zz})_{\varepsilon=0} = +2 \prod_{\substack{i=1 \\ \neq r}}^{N} (z_i - z_k)$$

ist. Damit ist

$$\cos 2\pi\varrho_{r,k} = \cos 2\pi q_k \pm 2\pi \sin 2\pi q_k \sqrt{\bar{P}_k}\,\varepsilon + 0\varepsilon^2,$$

wenn man das Ergebnis wieder in den ursprünglichen Größen ausdrückt. Da nach (52)

$$\text{für } q_r + q_k = 1 \qquad \bar{P}_k < 0$$

und nach (52′)

$$\text{für } q_r - q_k = 1 \qquad \bar{P}_k > 0$$

ist, hat also $\cos 2\pi\varrho_{r,k}$ für $\varepsilon \to 0$ nur über den Schwebungsfrequenzen $\delta_0 = \delta_r + \delta_k$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil und führt so zu den bekannten Instabilitäten zweiter Art. Die Nichtgleichwertigkeit der Schwebungsfrequenzen hat sich also auch auf diesem Wege bestätigt.

In dem Sonderfall $q_k = 1/2$, $q_r = 7/2$ läßt sich durch eine ε-Potenzreihenentwicklung auf gleichem Wege zeigen, daß gegenüber (60) keine Besonderheiten eintreten.

c) Zahlenmäßige Auswertung in einigen Beispielen.

Mit der Determinantentheorie lassen sich einige interessante Stabilitätsbereiche berechnen, welche mit der Störungstheorie nicht ohne weiteres aufzufinden sind. Insbesondere wird auch die Dämpfung mit in die Rechnung einbezogen.

Durch eine geeignet gewählte Vorlast von etwa der Hälfte der *Euler*schen Knicklast hatten sich die Zahlenwerte der Tab. 3 und 4 ergeben und innerhalb der Rechengenauigkeit ist der in der Störungstheorie ausgeschlossene Sonderfall $\delta_3 = 7\,\delta_1$ verwirklicht. Das Stabilitätsverhalten eines Stabes mit diesen Daten und mit Dämpfung wird in den nachfolgenden Zahlenbeispielen aus den Stabilitätsindizes (34) abgelesen. Zu dem Zweck hat man zunächst die charakteristischen Exponenten ϱ_m als im allgemeinen komplexe Wurzeln von Gleichungen N-ten Grades für $\cos 2\pi\varrho$ zu berechnen. Da man außerdem für jedes Wertepaar δ, ε eine gesonderte Rechnung durchzuführen hat, ist es wesentlich, daß man sich im Ansatz (32) in guter Näherung auf zwei Glieder ($N = 2$) beschränken kann. Dann sind die Gleichungen $\Delta(\varrho) = 0$ nach (45), (46) und (47) nur noch quadratische Gleichungen für $\cos 2\pi\varrho$. Zur Rechtfertigung dieser Beschränkung soll die Konvergenz hinsichtlich der Zahl der Gleichungen wenigstens in einem speziellen Falle numerisch verfolgt werden.

Für eine Anregungsfrequenz ($\delta = 30{,}000$) dicht unterhalb der doppelten ersten Eigenfrequenz und für einen Betrag der pulsierenden Lastamplitude von der Hälfte der ruhenden Vorlast $\left(\varepsilon = 0{,}5,\ P_1 \approx \frac{1}{4}\,P_E\right)$ ergeben sich die charakteristischen Exponenten mit den Zahlenwerten der Tab. 9. Da es sich in diesem Beispiel um ein Wertepaar δ, ε in einem Bereich erster Art handelt, liefert sogar ein eingliedriger Ansatz schon einen brauchbaren Wert. Um jedoch auch die Bereiche zweiter Art zu erfassen, wird stets mit einem zweigliedrigen Ansatz weitergerechnet.

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

Tabelle 9.

$\delta = 30{,}0000, \quad \varepsilon = 0{,}2453$

÷: Näherung liefert keinen Wert

Glieder-Zahl N	1. Wurzel		2. Wurzl	3. Wurzel	4. Wurzel
	Z_1	$\pm 2\pi\varrho_1$	$\pm 2\pi\varrho_2$	$\pm 2\pi\varrho_3$	$\pm 2\pi\varrho_4$
1	—1,05388	+0,50000 $+i\cdot 0{,}32682$	÷	÷	÷
2	—1,05518	+0,50000 $+i\cdot 0{,}33070$	1,53633	÷	÷
3	—1,05567	+0,50000 $+i\cdot 0{,}33215$	1,53596	2,12547	÷
4	—1,05565	+0,50000 $+i\cdot 0{,}33209$	1,53596	2,12547	1,30269

Da in der näherungsweisen Berechnung der Gleichungskoeffizienten nur Potenzen ε^3 einschließlich berücksichtigt wurden, und die Konvergenz dieser Reihen nicht geprüft ist, beschränken sich die nachfolgenden Zahlenrechnungen auf $\varepsilon < 0{,}25$.

Das Ziel der Zahlenrechnung ist jeweils, die Imaginärteile der ϱ_m abhängig von den Parametern δ und ε zu finden, um dann mit Hilfe von (34) die Stabilitätsfrage zu entscheiden. Für die Stabilitätsgrenze folgt insbesondere aus (34)

$$|Im\ \varrho_m(\varepsilon_G, \delta)| = \frac{\beta}{2\mu\delta f} \qquad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{62}$$

Die Dämpfungskonstante β soll durch das mit der tiefsten Biegeeigenfrequenz $\omega_1 = \delta_1 f$ gemessene Dekrement ausgedrückt werden:

$$\vartheta = \frac{\beta\pi}{2\mu\delta_1 f}.$$

Dann lautet die Grenzbedingung (62)

$$|Im\ \varrho_m(\varepsilon_G, \delta)| = \frac{\delta_1\vartheta}{\pi}\frac{1}{\delta} \tag{62'}$$

und die Grenzkurven der Instabilitätsbereiche $\delta_G(\varepsilon)$ sind aus einer Kurvenschar $|Im\ \varrho_m|$ abhängig von δ mit dem Parameter ε leicht numerisch anzugeben. Die rechte Seite von (62′) er-

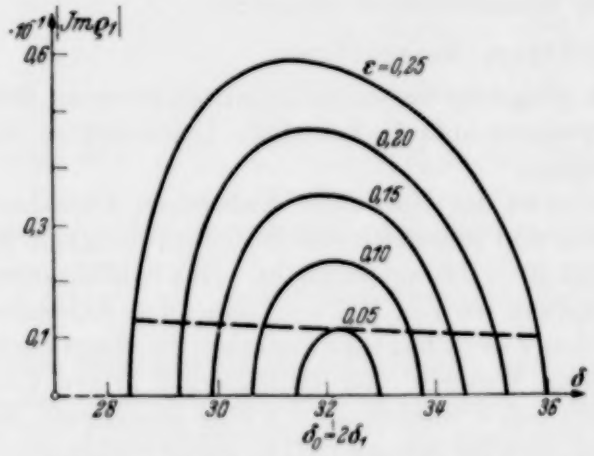

Abb. 8. $|Im\ \varrho_1|$ abhängig von δ mit dem Parameter ε in der Nähe von $\delta_0 = 2\delta_1$. Resonanzverhältnis $\eta = 0$.

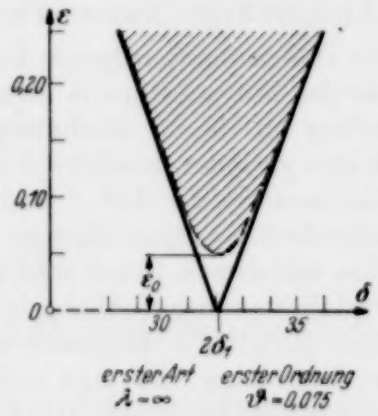

Abb. 9. Bereich erster Art erster Ordnung in der vereinfachten Theorie.

gibt in dieser Auftragung eine gleichseitige Hyperbel, welche für verschwindende Dämpfung zur Abszissenachse ausartet (vgl. Abb. 8, 10, 12).

Im einzelnen werden die nachstehenden Instabilitätsbereiche durchgerechnet.

α) *Bereich erster Art erster Ordnung*; *Vereinfachte Theorie* $\eta = 0$ (*sehr schlanke Stäbe*). In Abb. 8 ist $|Im\ \varrho_1|$ und die Dämpfungshyperbel für diesen Bereich in der Nähe der doppelten ersten Biegeeigenfrequenz aufgetragen. Etwa in Bereichsmitte tritt der Sonderfall (42) ein. Hier ist (45) für die Zahlenrechnung unbrauchbar, und man muß dann auf (47) übergehen. Dabei liegt in der Berechnung benachbarter Werte von ϱ_m nach verschiedenen Determinantengleichungen eine willkommene Möglichkeit, die numerische Rechnung zu proben. Wie man sieht, liegt dasMaximum von $Im\ \varrho_m$ ziemlich genau in der Mitte des Bereiches, so daß die vereinfachte

Berechnung (38) der charakteristischen Exponenten[1] i. a. eine gute Näherung gibt. Die Grenzkurven sind in Abb. 9 eingetragen, wobei die Dämpfung mit einem Dekrement von $\vartheta = 0{,}075$ sehr groß erwählt ist. Zur Anregung der Instabilität ist bei Vorhandensein dieser Dämpfung mindestens ein gewisser Schwellwert ε_0 der pulsierenden Amplitude erforderlich.

β) *Bereich zweiter Art erster Ordnung; Vereinfachte Theorie* $\eta = 0$ *(sehr schlanke Stäbe).* Die doppelte Schwebungsfrequenz $\delta_0 = \delta_1 + \delta_3$ ist in der vereinfachten Theorie die tiefste Schwe-

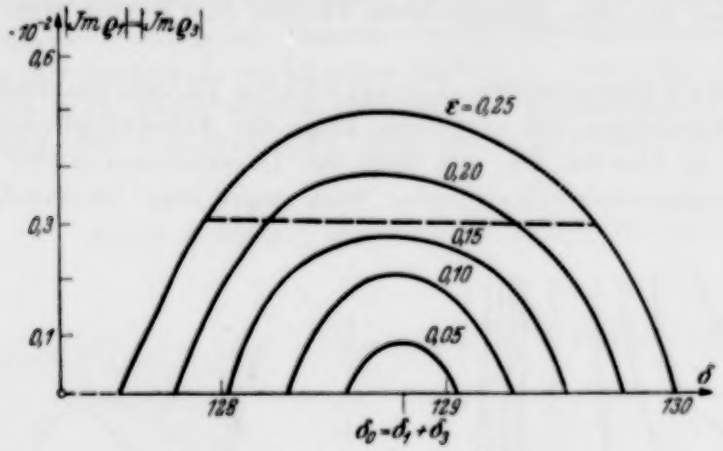

Abb. 10. $|Im\,\varrho_1|$ abhängig von δ mit dem Parameter ε in der Nähe von $\delta_0 = \delta_1 + \delta_3$. Resonanzverhältnis $\eta = 0$.

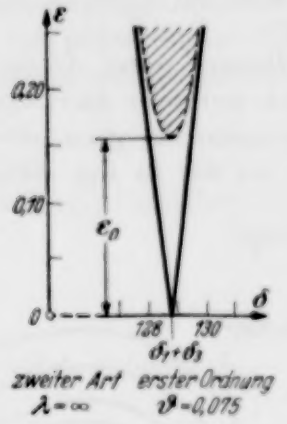

Abb. 11. Bereich zweiter Art erster Ordnung in der vereinfachten Theorie.

bungsfrequenz, in deren Nähe Instabilität der Querbewegung möglich ist, denn nach Abschnitt 3 c) α) zerfallen die Stabilitätsgleichungen (25) in der vereinfachten Theorie in zwei getrennte Systeme, welche von den geraden Eigenschwingungsformen (Index 1, 3, 5, ...) und den ungeraden (Index 2, 4, 6, ...) herrühren. In Abb. 10 ist wiederum $|Im\,\varrho_m|$ aufgezeichnet, und daraus wurden die Bereichsgrenzen gefunden und in Abb. 11 eingetragen.

Ein Vergleich der beiden Bereiche erster Ordnung ist aufschlußreich (Abb. 9, 11). Man ersieht, daß die Bereiche zweiter Art eine sehr viel geringere praktische Bedeutung haben werden, als die Bereiche erster Art, denn ihre Frequenzbreite ist sehr viel geringer. Auch die Dämpfung hat auf die Bereiche zweiter Art einen sehr

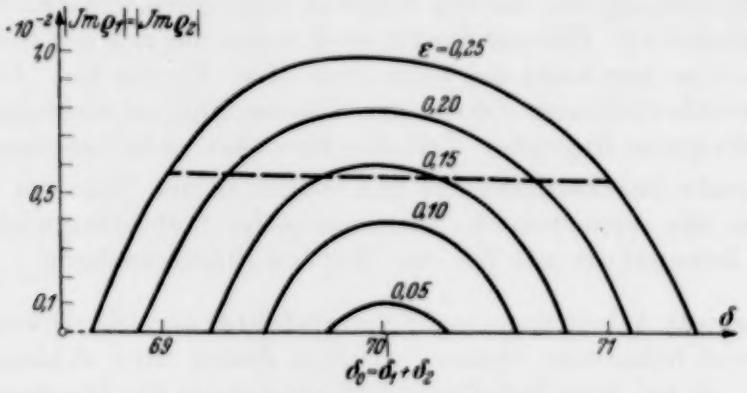

Abb. 12. $|Im\,\varrho_1|$ abhängig von δ mit dem Parameter ε in der Nähe von $\delta_0 = \delta_1 + \delta_2$. Resonanzverhältnis $\eta \neq 0$.

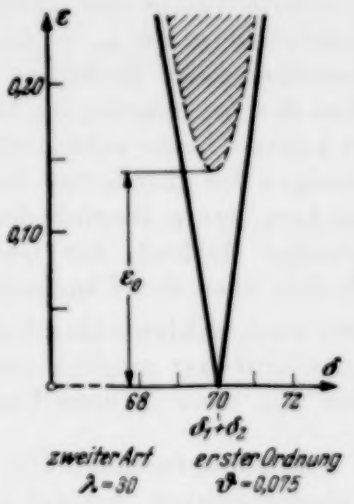

Abb. 13. Bereich zweiter Art erster Ordnung in der verschärften Theorie für den Schlankheitsgrad $\lambda = 30$.

viel stärkeren Einfluß, so daß ein größerer Schwellwert ε_0 zur Anregung einer Instabilität erforderlich sein wird, als in Bereichen erster Art.

Das Maß der Instabilität in den beiden Bereichen ist nach den Abb. 8 und 10 allerdings nicht ohne weiteres zu vergleichen, denn in Bereichen erster Art gibt es nur jeweils einen charakteristischen Exponenten, welcher mit seinem Imaginärteil für die Instabilität maßgebend ist. In Bereichen zweiter Art gibt es dagegen zwei derartige Exponenten, denn für $\cos 2\pi\varrho$ findet man ein konjugiert komplexes Wurzelpaar. Außerdem gehen in die Näherungslösung (32) für w

[1] Vgl. S. 441 der in Fußnote 5 von S. 162 genannten Arbeit.

nach (33) von den Anfangsbedingungen abhängige Integrationskonstanten ein, über die keine allgemeinen Aussagen gemacht werden können.

γ) *Bereich zweiter Art erster Ordnung; Verschärfte Theorie* $\eta \neq 0$ (*Schlankheitsgrad* $\lambda = 30$). Betrachtet man auch sehr gedrungene Stäbe, so sind Instabilitäten zweiter Art in der Nähe sämtlicher Schwebungsfrequenzen im Gegensatz zur vereinfachten Theorie möglich [vgl. Abschnitt 3 c) β)]. Die niedrigste Frequenz, welche dann zu einem Instabilitätsbereich führt, ist $\delta_0 = \delta_1 + \delta_2$. In Abb. 12 und 13 sind die zahlenmäßigen Ergebnisse wiedergegeben. Besonderheiten gegenüber den Bereichen zweiter Art der vereinfachten Theorie sind jedoch nicht zu bemerken.

δ) *Bereich erster Art in der Nähe der Längsresonanz.* Die verschärfte Theorie gestattet einen Ausblick auf sehr merkwürdige Erscheinungen, die eintreten, wenn die Anregungsfrequenz die Längsresonanzfrequenz erreicht. Wie in Abschn. 4 a) mit Hilfe der Transformation (36) gezeigt wurde, ist der in der Nähe der Längsresonanz schwingende Stab gegen eine Querauslenkung

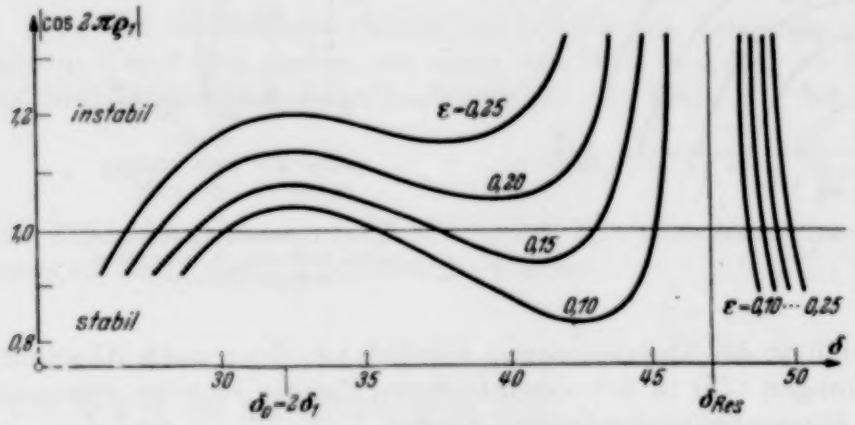

Abb. 14. $\cos 2\pi\varrho_1$ abhängig von δ mit dem Parameter ε in Längsresonanznähe.

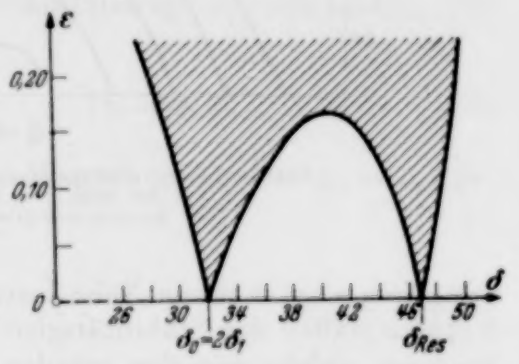

Abb. 15. Bereich erster Art in Längsresonanznähe.

instabil. Dies Verhalten ist auch mechanisch unmittelbar einleuchtend. Demnach muß es bei den Längsresonanzfrequenzen $\delta_{L\,Res.}$ zusätzliche Instabilitätsbereiche geben. Es wurde versucht, einen Instabilitätsbereich erster Art ($\delta_0 = 2\,\delta_1 = 32{,}20$) unmittelbar unterhalb der ersten Längsresonanzfrequenz ($\delta_{L\,Res.} = 47{,}12$) mit Hilfe der Determinantentheorie zu berechnen, obgleich die Grundlagen der Rechnung in Resonanznähe völlig unsicher sind, weil εF_{mn} nicht mehr klein ist. Aus der Auftragung in Abb. 14 wurden die Grenzkurven der Abb. 15 gewonnen. Dem Ergebnis kommt keine zahlenmäßige Bedeutung zu. Es soll lediglich behauptet werden, daß Erscheinungen der skizzierten Art möglich sind. Hierauf deutet auch schon der mit der Störungstheorie berechnete Bereich der Abb. 5 in Abschnitt 4c) beim Stab ohne Vorlast hin. Die dort angewandte Methode der Grenzkurvenberechnung durch eine Potenzreihenentwicklung kann jedoch den über der Längsresonanzfrequenz liegenden Teil des Bereiches nicht erfassen.

Eine auch zahlenmäßig befriedigende Beschreibung der Instabilität in der Nähe der Längsresonanz wird erst möglich sein, wenn die asymptotische Integration der Stabilitätsgleichungen (25) für $\varepsilon \gg$ etwa in dem Umfange bekannt ist wie bei der *Mathieu*-Einzelgleichung.

6. Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit untersucht die Stabilität der Querbewegungen eines eingespannten, achsial pulsierend belasteten Stabes. Zu dem Zweck wird abhängig von Frequenz und Amplitude untersucht, ob bei einer beliebigen Anfangsstörung die Querbewegung unbegrenzte Amplituden annehmen kann oder nicht. In Ermangelung eines geeigneten Ansatzes wird eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung zugrunde gelegt. Die rechnerische Behandlung wird über ein Variationsproblem durchgeführt, wobei das Variationsproblem durch einen *Ritz*-Ansatz mit zeitabhängigen Koeffizienten genähert gelöst wird. Das auf diesem Wege entstehende gewöhnliche Differentialgleichungssystem mit periodischen Koeffizienten kann als Verallgemeinerung der *Mathieu*schen Differentialgleichung angesehen werden und dient zur Beurteilung der Stabilität. Sieht man von der Dämpfung zunächst ab, so kann mit der allgemeinen Theorie von *E. Mettler*[1] Grenzkurven in der (δ, ε)-Ebene berechnen, welche diejenigen zusammengehörigen Werte von Frequenz und Amplitude einschließen, die zu instabilen Bewegungsformen führen können. Um auch die Dämpfung und einige bisher ausgeschlossene Sonderfälle in die

[1] Vgl. Fußnote 5 von S. 162.

Betrachtung einzubeziehen, werden die zur Beurteilung der Stabilität dienenden charakteristischen Exponenten des Differentialgleichungssystems mit Hilfe unendlicher Determinanten unmittelbar berechnet, und daraus die Grenzkurven abgeleitet.

Die Behandlung des Problems wird auf zwei verschiedenen Stufen der Näherung durchgeführt. Die bisher allein gebräuchliche erste Näherung unterdrückt den Resonanzfall völlig, gestattet aber einen vollständigen Überblick über die Erscheinungen. An Einzelbeispielen wird gezeigt, wie die verschärfte Theorie die Resonanzfrequenzen der Längsschwingungen berücksichtigt und zu weiteren Instabilitätsbereichen führt. Die Abgrenzung der Näherungen gegeneinander ergibt, daß die vereinfachte Theorie nur für extrem schlanke Stäbe zahlenmäßige Bedeutung hat.

Für die technisch wichtigsten Instabilitätsbereiche des Stabes mit pulsierender Längslast ohne ruhenden Anteil werden sehr einfache Näherungsformeln angegeben, welche einen raschen Überblick über das Stabilitätsverhalten technischer Stäbe gestatten.

Aus dem Institut für Mathematik und Mechanik der Bergakademie Clausthal.

(Eingegangen am 7. Oktober 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *F. Weidenhammer*, Clausthal-Zellerfeld, Schulstr. 2.

Über den Mechanismus der Wirbelkerne einer Kármánschen Wirbelstraße.

Von W. Kaufmann.

1. Einleitung. Wird ein prismatischer Körper senkrecht zu seiner Achse gleichförmig mit der Geschwindigkeit U in einer ruhenden, wenig zähen Flüssigkeit bewegt, so bildet sich bekanntlich hinter dem Körper ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Wirbelsystem aus. Bei geeigneten Werten von U und entsprechenden Körperabmessungen ordnen sich dabei die einzelnen Wirbel in bestimmten Abständen auf zwei nahezu parallelen Geraden an. Sie bilden, wie man sagt, eine Wirbelstraße, die dem Körper, als Ganzes betrachtet, mit der kleineren Geschwindigkeit $u < U$ folgt. Zwischen den beiden Wirbelreihen stellt sich eine pendelnde Bewegung der Flüssigkeit ein.

Diese in Wasserrinnen beobachtbare Erscheinung veranlaßte *Th. v. Kármán*, die Stabilität einer derartigen Wirbelkonfiguration genauer zu studieren[1]. Dabei werden folgende idealisierende Annahmen gemacht:

1. Die Flüssigkeit soll reibungsfrei und raumbeständig sein.

2. Der prismatische Körper (rechteckige Platte, Zylinder od. dgl.) wird senkrecht zur Strömung als unendlich lang vorausgesetzt (ebenes Problem).

3. Die einzelnen Wirbelfäden stehen senkrecht zur Strömungsrichtung und werden als Potentialwirbel eingeführt, deren Drehsinn auf beiden Seiten der Straße entgegengesetzt ist.

4. Außerhalb dieser Wirbelfäden (die sich in der Bildebene als „Wirbelpunkte" projizieren) herrscht Potentialströmung.

5. Die Wirbelstraße wird als beiderseits unendlich lang angenommen. Die Frage nach der Entstehung der Wirbel wird nicht diskutiert, die Existenz der Wirbel vielmehr als eine physikalische Realität angesehen.

Unter den vorstehenden Voraussetzungen findet *v. Kármán*, daß nur die aus Abb. 1 ersichtliche Wirbelanordnung gegen kleine Störungen der Anfangslage stabil ist, bei welcher die Wirbelfäden der beiden Reihen um die Strecke $l/2$ gegeneinander verschoben sind[2]. Dabei ergibt sich für das Verhältnis zwischen dem Abstand h der beiden Wirbelreihen und dem seitlichen Wirbelabstand l (Wirbelteilung) der von der speziellen Querschnittsform des Körpers unabhängige Wert[3]

$$\frac{h}{l} = 0{,}281\,. \tag{1}$$

Demgegenüber kann man bei Laboratoriumsversuchen häufig trotz sorgfältigen Experimentierens bereits vom dritten oder vierten Wirbelpaar ab ein Zerflattern der Wirbelstraße beobachten, was darauf schließen läßt, daß irgendwelche Einflüsse vorhanden sind, welche die für die „ideale" Strömung nachgewiesene Stabilität stören. Die Ursachen hierzu sind noch nicht hinreichend geklärt; im allgemeinen wird die Flüssigkeitsreibung dafür verantwortlich gemacht. Man kann nun zeigen, daß diese auch bei wenig zähen Flüssigkeiten nicht in Erscheinung tritt, sofern man, wie oben geschehen, die Bewegung der Wirbelstraße als Potentialströmung ansieht. Für die raumbeständige Flüssigkeit lautet die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,. \tag{2}$$

Außerdem ist wegen der im Gebiet außerhalb der Wirbelfäden vorausgesetzten *Wirbelfreiheit*

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0\,, \tag{3}$$

wenn v_x und v_y die Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinatenachsen bezeichnen.

[1] *Th. v. Kármán*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1911/12 und *v. Kármán* u. *Rubach*, Physik. Z. 13 (1912), S. 49.

[2] Auf die Möglichkeit, daß bei ganz speziellen Störungen auch die Wirbelanordnung nach Abb. 1 instabil sein kann, hat *C. Schmieden* hingewiesen, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 215.

[3] Vgl. hierzu die von *A. W. Maue*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 130, angegebene Verallgemeinerung des *Kármán*schen Stabilitätskriteriums.

Differentiiert man (2) nach x und (3) nach y, und addiert die so entstehenden Ausdrücke, dann ergibt sich

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \equiv \Delta v_x = 0 . \tag{4}$$

Eine entsprechende Beziehung gilt für die y-Richtung. Die Werte Δv_x und Δv_y sind aber gerade die Größen, in denen sich die *Navier-Stokes*schen Gleichungen der zähen Flüssigkeit von den *Euler*-Gleichungen der idealen unterscheiden. Im Innern der Flüssigkeit, d. h. fern von allen Wänden, treten demnach die Reibungskräfte dynamisch überhaupt nicht in Erscheinung. Die bei „natürlichen" Flüssigkeiten tatsächlich beobachtete Störung der Stabilität läßt also darauf schließen, daß die vorausgesetzte Potentialströmung sich auf die Dauer gar nicht einstellt, daß vielmehr entweder von den Rändern der Flüssigkeit oder von den Wirbelfäden — für welche ja Gleichung (4) nicht gilt — Störungen ausgehen, welche das „ideale" Strömungsbild allmählich verändern.

Den Einfluß von Wänden, die zu den Wirbelachsen senkrecht stehen, hat *K. Schlayer*[1] untersucht; er findet, daß eine schwache Instabilität auftritt, wenn der Abstand der zu den Wirbelachsen senkrechten Begrenzungsebenen größer ist als 1/100 der Straßenbreite h. Die quantitativen Ergebnisse seiner Theorie können jedoch nicht als endgültig angesehen werden, da die von ihm angestellte Betrachtung über das Energiefeld der Wirbelstraße für eine „natürliche", wenn auch nur wenig zähe Flüssigkeit den wirklichen Verhältnissen nicht gerecht wird.

Die vorliegende Untersuchung beschäftigt sich nicht mit dem eventuellen Einfluß der Wände auf die Stabilität der Straße (Einfluß der Gerinnetiefe und Gerinnebreite). Sie soll vielmehr der Frage gelten, ob das theoretische Strömungsbild etwa dadurch wesentlich gestört wird, daß in einer „natürlichen" Flüssigkeit keine „Potentialwirbel" auftreten, sondern Wirbel von endlichem Querschnitt.

Nach der *Prandtl*schen Grenzschichttheorie sind derartige „Wirbel" das Endprodukt einer sich aufrollenden Trennungsschicht, die sich infolge der Reibungseinflüsse in einer schmalen Zone (Grenz- oder Reibungsschicht) in unmittelbarer Nähe des umströmten Körpers ausbildet[2]. Es erhebt sich jetzt die Frage nach der Größe dieser Wirbel, um dadurch beurteilen zu können, wie weit gegebenenfalls das Stromlinienbild der *Kármán*schen Idealströmung von dem der wirklichen Strömung abweichen wird. Nachstehend soll der Versuch gemacht werden, mit Hilfe des Energiesatzes etwas über die Größe dieser Wirbel auszusagen.

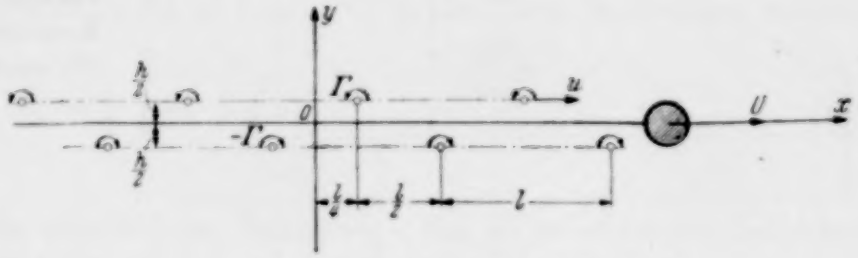

Abb. 1. Schema der Wirbelstraße.

2. Die kinetische Energie des Geschwindigkeitsfeldes der Wirbelstraße. Die durch die Wirbelstraße erzeugte Potentialströmung ist instationär. Ihr komplexes Strömungspotential, bezogen auf das aus Abb. 1 ersichtliche Koordinatensystem, lautet mit

$$z_1 = \frac{l}{4} + i\frac{h}{2} \tag{5}$$

$$w = \varphi + i\,\psi = \frac{i\,\Gamma_0}{2\,\pi} \ln \frac{\sin\left[(z + z_1)\frac{\pi}{l}\right]}{\sin\left[(z - z_1)\frac{\pi}{l}\right]} , \tag{6}$$

worin $\varphi(x, y)$ das Geschwindigkeitspotential, $\psi(x, y)$ die Stromfunktion und Γ_0 die Zirkulation der einzelnen Wirbel darstellen, während $z = x + iy$ einen beliebigen Punkt des Feldes angibt[3]. Spaltet man diesen Ausdruck in seinen reellen und imaginären Teil auf, so liefert der

[1] *K. Schlayer*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 352.
[2] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre, 3. Aufl., S. 127. Vgl. hierzu auch *A. Betz*, Naturwiss. 37 (1950), S. 193.
[3] Vgl. etwa *W. Kaufmann*, Angew. Hydromechanik, 1. Bd. (1931), S. 193.

imaginäre Teil als **Stromfunktion der Wirbelstraße** den Wert

$$\psi = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \ln \frac{\sin^2\left[\left(x+\frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Cof}^2\left[\left(y+\frac{h}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right] + \cos^2\left[\left(x+\frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Sin}^2\left[\left(y+\frac{h}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right]}{\sin^2\left[\left(x-\frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Cof}^2\left[\left(y-\frac{h}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right] + \cos^2\left[\left(x-\frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Sin}^2\left[\left(y-\frac{h}{2}\right)\frac{\pi}{l}\right]}. \tag{7}$$

Abb. 2 zeigt einen Ausschnitt des Stromlinienbildes einer stabilen Wirbelstraße nach *v. Kármán*. Daraus ist ersichtlich, daß das Strömungsfeld in zwei verschiedene Bereiche zerfällt: das Gebiet um die Wirbelpunkte (kreisende Bewegung) und das zwischen ihnen liegende Gebiet der pendelnden Bewegung. Die Stromlinien, welche beide Bereiche begrenzen, sollen hinfort als **Grenzstromlinien** bezeichnet werden.

Für den innerhalb einer oberen Grenzstromlinie liegenden Wirbelpunkt mit den Koordinaten $x = l/4 + nl$ und $y = h/2$ (n = ganze Zahl) folgt aus Gleichung (7)

$$\psi_W = \infty . \tag{8}$$

Die kinetische Energie der **kreisenden** Bewegung um **einen** Wirbelpunkt läßt sich unter Beachtung der Abb. 2, bezogen auf die Tiefe „eins", wie folgt darstellen:

$$E_{kr} = \frac{\varrho}{2} \int_{\psi_{gr}}^{\psi_W} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} v^2 \, dn \, ds , \tag{9}$$

wobei v die skalare Geschwindigkeit, ds das Längenelement einer Stromlinie und dn den Abstand zweier benachbarter Stromlinien bezeichnen. Das Doppelintegral erstreckt sich über den ganzen Bereich von der Grenzstromlinie (ψ_{gr}) bis zum Wirbelpunkt (ψ_W). Der Ausdruck

$$v\,dn = d\psi$$

stellt das sekundliche Durchflußvolumen zwischen zwei Stromlinien dar, das aus Kontinuitätsgründen konstant ist, weshalb (9) auch in der Form

$$E_{kr} = \frac{\varrho}{2} \int_{\psi_{gr}}^{\psi_W} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} v \, ds \tag{10}$$

geschrieben werden kann. Beachtet man noch, daß

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} v \, ds = \Gamma_0$$

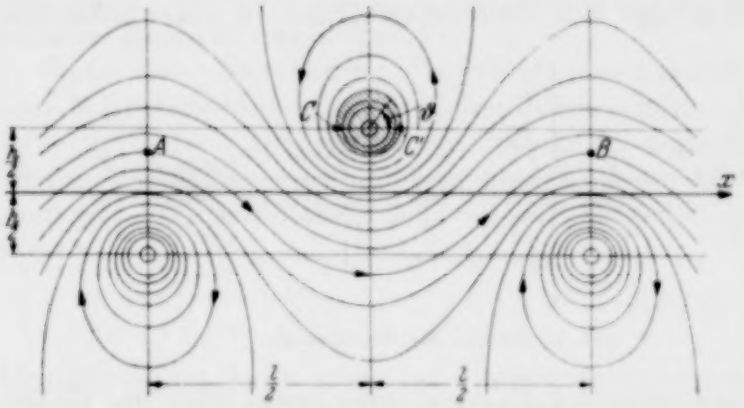

Abb. 2. Stromlinienbild der Wirbelstraße.

die Zirkulation längs einer Stromlinie um den Wirbelpunkt angibt, welche für alle Stromlinien des betrachteten Bereiches den gleichen Wert besitzt, so folgt aus (10)

$$E_{kr} = \frac{\varrho}{2} \Gamma_0 (\psi_W - \psi_{gr}) , \tag{11}$$

und dieser Ausdruck wird wegen (8) unendlich groß. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man für das Feld jedes der übrigen Wirbel.

Nach dem Energiesatz ist die kinetische Energie der hinter dem bewegten Körper entstehenden Strömung das Äquivalent der Arbeit, die bei der Vorwärtsbewegung des Körpers geleistet wird. Da diese Arbeit durchaus endlich ist, widerspricht das gewonnene Ergebnis den physikalischen Tatsachen. Die Ursache ist nach dem weiter oben über die Wirbel Gesagten leicht verständlich. In der Umgebung des theoretischen Wirbelpunktes bildet sich ein Strömungsgebiet aus, in dem die bisher angenommene Potentialströmung nicht mehr gilt, und dessen Energie einen endlichen Wert besitzt. In der Folge soll dieser Bereich als **Wirbelkern** bezeichnet werden. Seine Größe ist zunächst unbekannt.

Es sei nun angenommen, daß **außerhalb** dieser Wirbelkerne auch weiterhin Potentialströmung vorhanden sei, und daß der Rand des Wirbelkernes zugleich Randstromlinie der äußeren Potentialströmung ist. Bezeichnet man die Stromfunktion dieser Randstromlinie mit

ψ_r, so kann die Energie der kreisrunden Bewegung außerhalb eines Wirbelkernes nach (10) in der Form

$$E'_{kr} = \frac{\varrho}{2} \int_{\psi_{gr}}^{\psi_r} d\psi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} v\, ds$$

angeschrieben werden, wobei jetzt ψ_r die obere Integrationsgrenze darstellt. Man erhält dann

$$E'_{kr} = \frac{\varrho}{2} \Gamma_0 (\psi_r - \psi_{gr}) . \tag{12}$$

Der Wert ψ_r ist zunächst unbekannt. Um die gesamte Energie der kreisenden Bewegung um einen Wirbelpunkt zu erhalten, hat man zu (12) noch die Energie E_W des Wirbelkernes hinzuzufügen, so daß

$$E_{kr} = \frac{\varrho}{2} \Gamma_0 (\psi_r - \psi_{gr}) + E_W \tag{13}$$

wird.

Zur Berechnung der Energie der pendelnden Bewegung soll ein Gebiet von der Länge l betrachtet werden, dessen seitliche Ränder die Lotrechten $x = {}^3/_4 l + nl$ und $x' = {}^3/_4 l + (n+1)l$ bilden, und das im übrigen durch die obere und untere Grenzstromlinie eingeschlossen ist. Die kinetische Energie dieses Strömungsbereiches ist

$$E_p = \frac{\varrho}{2} \int_{\psi'_{gr}}^{\psi_{gr}} \int_{A}^{B} v^2\, dn\, ds . \tag{14}$$

Darin bezeichnen ψ_{gr} die Stromfunktion der oberen, ψ'_{gr} diejenige der unteren Grenzstromlinie, A und B Anfangs- und Endpunkt einer beliebigen Stromlinie zwischen den beiden Lotrechten, die das betrachtete Gebiet seitlich begrenzen (Abb. 2), während ds und dn die gleiche Bedeutung haben wie oben. Setzt man wieder $v\, dn = d\psi$, so kann (14) in der Form geschrieben werden

$$E_p = \frac{\varrho}{2} \int_{\psi'_{gr}}^{\psi_{gr}} d\psi \int_{A}^{B} v\, ds . \tag{15}$$

Das Integral $\int_A^B v\, ds$ hat eine einfache physikalische Bedeutung. Um sie zu erläutern, betrachte man die Zirkulation längs des geschlossenen Linienzuges, der von folgenden Linien gebildet wird: Stromlinie $A\,B$, Lotrechte durch B bis $y = \infty$, Gerade $y = \infty$ zwischen den Lotrechten durch A und B, Lotrechte durch A von $y = \infty$ bis zum Punkte A. Da für $y = \infty$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, und da die beiden Lotrechten durch A und B alle Stromlinien senkrecht schneiden, kann nur das Stromlinienstück von A nach B einen Beitrag zur Zirkulation liefern. Es muß also sein

$$\int_A^B v\, ds = \Gamma_0 ,$$

da innerhalb des betrachteten Linienzuges nur e i n Wirbel von der Zirkulation Γ_0 liegt. Somit erhält man aus (15)

$$E_p = \frac{\varrho}{2} \Gamma_0 (\psi_{gr} - \psi'_{gr}) .$$

Wie man leicht feststellt, ist $\psi_{gr} = -\psi'_{gr}$, weshalb

$$E_p = \varrho\, \Gamma_0\, \psi_{gr} . \tag{16}$$

Faßt man schließlich die gesamte Energie der kreisenden und der pendelnden Bewegung in dem Gebiet zwischen den beiden Geraden $x = {}^3/_4 l + nl$ und $x' = {}^3/_4 l + (n+1)l$ zusammen und beachtet, daß darin die Energie von z w e i Wirbeln enthalten ist, so erhält man aus (13) und (16)

$$E = 2\, E_{kr} + E_p = \varrho\, \Gamma_0\, \psi_r + 2\, E_W . \tag{17}$$

Zur zahlenmäßigen Berechnung dieser Energie bedarf es also nur der Kenntnis der Energie des

Wirbelkernes sowie der Stromfunktion des Kernrandes. Beide Größen hängen miteinander zusammen.

3. Der Wirbelkern. Wie bereits unter Ziffer 1 bemerkt wurde, enthalten die Wirbelkerne die spiralförmig aufgespulten Unstetigkeitsflächen, die infolge Grenzschichtbildung an dem umströmten Hindernis (Platte, Zylinder od. dgl.) ständig neu entstehen. Nimmt man zunächst an, daß die Querschnitte der Wirbelkerne unserer Wirbelstraße klein gegenüber dem Gesamtbereich der kreisenden Bewegung um die theoretischen Wirbelpunkte sind, so können die Kernränder angenähert als Kreise aufgefaßt werden. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Energie eines Wirbelkernes in der Form darstellen [1]

$$E_W = \frac{\varrho}{2} \int_{r=0}^{r=r_0} \frac{\Gamma_r^2}{2\pi r}\, dr, \tag{18}$$

wobei r_0 den Halbmesser des Kernrandes, r denjenigen einer Stromlinie innerhalb des Kerns und Γ_r die mit r veränderliche Zirkulation längs dieses Kreises bezeichnen. Für $r = 0$ ist $\Gamma_r = 0$, für $r = r_0$ dagegen gleich Γ_0, d. h. gleich der Gesamtzirkulation eines Wirbels (s. oben). Der Verlauf $\Gamma_r = \Gamma_r(r)$ ist nicht bekannt. Man kann darüber außer den vorstehenden Randbedingungen nur vorschreiben, daß $[d\Gamma_r/dr]_{r \to r_0} = 0$ sein muß, da für $r \geq r_0$ die Zirkulation nicht mehr wächst. Aus der Untersuchung der Wirbelkerne, die sich hinter Tragflügeln einstellen, ist bekannt, daß $[d\Gamma_r/dr]_{r \to 0} \to \infty$ geht [2]. Sieht man diese Bedingung auch im vorliegenden Falle als gültig an, so ist der einfachste Ansatz, den man für $\Gamma_r(r)$ machen kann, eine über den Halbmesser r elliptisch ansteigende Zirkulationsverteilung. Es mag also dafür der Ansatz

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \sqrt{2\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \tag{19}$$

gewählt werden, welcher jedenfalls die vier oben gestellten Bedingungen erfüllt. Damit lautet (18)

$$E_W = \frac{\varrho\, \Gamma_0^2}{4\pi\, r_0^2} \int_{r=0}^{r=r_0} (2r_0 - r)\, dr$$

oder

$$E_W = \frac{\varrho\, \Gamma_0^2}{2\pi} \cdot \frac{3}{4}. \tag{20}$$

Das bedeutet, daß die Energie eines derartigen Wirbelkernes nicht von seiner Größe, sondern nur von der Zirkulation Γ_0 abhängt. Mit diesem Ausdruck für E_W liefert Gleichung (17) als gesamte Energie des betrachteten Bereiches

$$E = \varrho\, \Gamma_0 \left(\psi_r + \frac{3}{4}\frac{\Gamma_0}{\pi}\right). \tag{21}$$

Die Relativgeschwindigkeit des durch die Flüssigkeit bewegten Körpers gegen die Wirbelstraße ist $U - u$. Demnach beträgt die Zeit, welche verstreicht bis die Wirbelstraße sich um die Länge l vergrößert hat,

$$T = \frac{l}{U - u}. \tag{22}$$

Während dieser Zeit bewegt sich der Körper absolut um die Strecke

$$l_0 = U\, T = \frac{U\, l}{U - u} \tag{23}$$

vorwärts. Dabei leistet die zu seiner Bewegung erforderliche Kraft P die mechanische Arbeit Pl_0, welche, sofern vorerst von allen Reibungseinflüssen abgesehen wird, das Äquivalent der Energie (21) darstellt. Man erhält somit

$$Pl_0 = \varrho\, \Gamma_0 \left(\psi_r + \frac{3}{4}\frac{\Gamma_0}{\pi}\right). \tag{24}$$

---

[1] *W. Kaufmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 190.
[2] *W. Kaufmann*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Mathem.-Naturwiss. Abt. 1946, S. 109.

Bezeichnet c_w die „Widerstandsziffer" des bewegten Körpers und b seine Höhe (senkrecht zur Strömung), so kann P, bezogen auf die Tiefe „eins", bekanntlich in der Form angeschrieben werden

$$P = c_w \frac{\varrho}{2} U^2 b \,, \tag{25}$$

während l_0 mit der Abkürzung

$$\frac{u}{U} = n \tag{26}$$

die Form

$$l_0 = \frac{l}{1-n} \tag{27}$$

annimmt. Mit diesen Werten lautet Gleichung (24)

$$c_w \frac{\varrho}{2} U^2 b \frac{l}{1-n} = \varrho \Gamma_0 \left(\psi_r + \frac{3}{4}\frac{\Gamma_0}{\pi}\right). \tag{28}$$

Es möge nun x_r die Abszisse des Punktes C bezeichnen, in dem der linke Rand des Wirbelkernes die durch den theoretischen Wirbelpunkt gehende Horizontale $y = h/2$ schneidet. Dann erhält man als Stromfunktion der durch C gehenden Randstromlinie aus Gleichung (7) mit $x = x_r$ und $y = h/2$ den Wert

$$\psi_r = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \ln \frac{\sin^2\left[\left(x_r + \frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Cof}^2\left(\frac{h}{l}\pi\right) + \cos^2\left[\left(x_r + \frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right] \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{h}{l}\pi\right)}{\sin^2\left[\left(x_r - \frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l}\right]}. \tag{29}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{h}{l}\pi\right) = c_1, \qquad \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{h}{l}\pi\right) = c_1 - 1 = c_2 \tag{30}$$

und

$$\left(x_r + \frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l} = \alpha, \qquad \left(x_r - \frac{l}{4}\right)\frac{\pi}{l} = \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

und führt (29) in Gleichung (28) ein, so wird

$$c_w \frac{\varrho}{2} U^2 b \frac{l}{1-n} = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{4\pi}\left(\ln \frac{c_1 \sin^2\alpha + c_2 \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 3\right). \tag{32}$$

Nach *v. Kármán*[1] besteht zwischen der Fortschrittsgeschwindigkeit u der Wirbelstraße und der Zirkulation Γ_0 die einfache Beziehung

$$u = \frac{\Gamma_0}{l\sqrt{8}}.$$

Damit wird wegen (26)

$$U^2 = \frac{\Gamma_0^2}{8 n^2 l^2},$$

so daß (32) übergeht in

$$\frac{c_w \pi}{4 n^2 (1-n)} \frac{b}{l} - 3 = \ln\left(c_1 \operatorname{tg}^2\alpha + c_2\right). \tag{33}$$

Setzt man die Konstante

$$\frac{c_w \pi}{4 n^2 (1-n)} \frac{b}{l} - 3 = \varkappa, \tag{34}$$

so folgt aus (33)

$$e^{\varkappa} = c_1 \operatorname{tg}^2\alpha + c_2$$

und somit

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm \sqrt{\frac{e^{\varkappa} - c_2}{c_1}}. \tag{35}$$

[1] *Th. v. Kármán*, a. a. O.

Aus dieser Gleichung kann zunächst α und wegen (31) x_r berechnet werden, wenn c_w, n, b und l bekannt, bzw. durch Messung bestimmt sind.

Bei den *Kármán*schen Versuchen wurden eine senkrecht zu ihrer Ebene bewegte Platte von der Höhe $b = 1{,}75$ cm und ein Kreiszylinder vom Durchmesser $b = 1{,}5$ cm verwendet. Die entsprechenden Versuchswerte waren:

$$\text{Platte:} \quad n = 0{,}2, \quad b = 1{,}75 \text{ cm}, \quad l = 9{,}8 \text{ cm}, \quad c_w = 1{,}6.$$

$$\text{Zylinder:} \quad n = 0{,}14, \quad b = 1{,}50 \text{ cm}, \quad l = 6{,}4 \text{ cm}, \quad c_w = 0{,}92.$$

Damit erhält man aus (34) für die Platte $\varkappa_p = 4{,}02$ und für den Zylinder $\varkappa_z = 7{,}04$. Nach (30) ist unter Beachtung von Gleichung (1) $c_1 = 2{,}0$ und $c_2 = 1{,}0$. Aus (35) folgt also für die Platte $\operatorname{tg}\alpha = \pm 5{,}22$. Diesem Werte entsprechen die beiden Winkel $\alpha_1 = 1{,}38$ und $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = 1{,}76$. Aus (31) erhält man damit als Abszisse des Punktes C (Abb. 2) $x_r = 1{,}86$ cm und als Abszisse des rechts vom Wirbelzentrum liegenden Punktes C' des Kernrandes $x_r' = 3{,}04$ cm. Demnach wird für die Plattenströmung der horizontale Kerndurchmesser $d_P = x_r' - x_r = 1{,}18$ cm. Die entsprechenden Zahlenwerte beim Zylinder ergeben sich wie folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha \pm 23{,}88, \quad \alpha_1 = 1{,}5287, \quad \alpha_2 = 1{,}6129, \quad x_r = 1{,}51, \quad x_r' = 1{,}69, \quad d_Z = 0{,}18 \text{ cm}.$$

Da nun die Breite der Wirbelstraße für die Platte theoretisch nach (1) $h_P = 0{,}281\, l = 2{,}75$ cm und für den Zylinder 1,8 cm ist, so wird $d_P = 0{,}43\, h_P$, $d_Z = 0{,}1\, h_Z$.

Die vorstehende Theorie liefert also für die Platte einen wesentlich größeren Wert d/h als für den Zylinder. Unter diesen Umständen erscheint es fraglich, ob für die Platte die oben gemachte Annahme kreisförmiger Kernquerschnitte und der darauf beruhende Ansatz (19) für die Zirkulationsverteilung noch zulässig sind.

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang die Feststellung, daß die von *v. Kármán* und *Rubach* experimentell gefundene Breite h der Wirbelstraße beim Zylinder sehr gut mit dem theoretischen Wert nach Gleichung (1) übereinstimmt, während für die Platte als Mittelwert $h_P = 3{,}0$ cm, unmittelbar hinter dem Körper sogar 3,5 cm, festgestellt wurde, im Gegensatz zu dem mit $l = 9{,}8$ cm aus (1) berechneten Wert von 2,75 cm. Es scheint danach, daß die Theorie die wirklichen Verhältnisse für den Zylinder besser wiedergibt als für die Platte. Und das könnte damit zusammenhängen, daß eben beim Zylinder der kleinere Kerndurchmesser eher dem Idealbild des Potentialwirbels entspricht als bei der Platte. Der Unterschied in den Verhältniswerten d/h für Platte und Zylinder wird übrigens erheblich gemildert, wenn man als c_w-Wert der Platte nicht den aus der *Kármán*schen Widerstandsformel berechneten, sondern den für ebene Strömung gültigen Wert 2,01 einführt[1]. Mit diesem Wert liefert die obige Rechnung $\varkappa_P = 5{,}82$ und damit $d_P = 0{,}48$ cm, oder $d_P/h = 0{,}175$.

Behält man trotz der vorstehend geäußerten Bedenken zunächst einmal Gleichung (20) bei, wonach die Kernenergie lediglich von der Zirkulation Γ_0 abhängt, so kann die Energiebedingung (32) wie folgt geschrieben werden: Die linke Seite dieser Gleichung stellt, wie aus ihrer Herleitung folgt, die Arbeit Pl_0 dar, während der erste Summand der Klammer wegen (33) und (34) gleich $\varkappa$ ist. Somit wird

$$Pl_0 = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{4\pi}(\varkappa + 3).$$

Mit den oben errechneten $\varkappa$-Werten ergibt sich daraus für die Platte

$$Pl_0 = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{4\pi}(4{,}02 + 3)$$

bzw., wenn mit $c_w = 2{,}01$ gerechnet wird,

$$Pl_0 = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{4\pi}(5{,}82 + 3),$$

und für den Zylinder

$$Pl_0 = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{4\pi}(7{,}04 + 3),$$

wobei der zweite Summand jeweils den Beitrag der Kernenergie darstellt. Man erkennt daraus, daß bei der Platte von der geleisteten Arbeit 43% (34%) in Kernenergie umgesetzt wird, beim Zylinder dagegen nur 30%.

[1] Vgl. Hütte, Bd. I, 27. Aufl., S. 493.

Um jetzt noch einmal auf die in Ziffer 1 aufgeworfene Frage nach der Stabilität einer „physikalischen" Wirbelstraße zurückzukommen, kann bezüglich der Wirbelkerne folgendes gesagt werden: Bei ebenen, reibungsfreien Strömungen in konzentrischen Kreisen können die Zentrifugalkräfte je nach ihrer radialen Änderung stabilisierend oder destabilisierend wirken. Bezeichnet $\bar{u}$ den Mittelwert der tangentialen Geschwindigkeit, so hat man es nach *Prandtl*[1] mit Stabilität zu tun, wenn das Produkt $\bar{u}\,r$ nach außen hin zunimmt, im anderen Falle mit Instabilität. Bei Potentialströmung mit Zirkulation herrscht indifferentes Gleichgewicht. In den hier betrachteten Wirbelkernen ist $\bar{u}\,r = \Gamma_r/2\,\pi$, und dieses Produkt nimmt nach außen hin bis zum Kernrand zu. Der Wirbelkern stellt demnach ein s t a b i l e s Gebilde dar. Die Tatsache allein, daß in einer physikalischen Wirbelstraße derartige Wirbelkerne an Stelle der Potentialwirbel auftreten, kann also kein Grund für das häufig beobachtete Zerflattern der Wirbelstraße sein.

Andererseits muß festgestellt werden, daß der in Ziffer 1 gezogene Schluß bezüglich des Wegfalls aller Reibungseinflüsse in der äußeren Potentialströmung für die Kerne nicht mehr zu trifft, da in den Kernen Gleichung (3) und somit auch (4) keine Gültigkeit haben.

Damit erfährt aber auch die weiter oben zunächst für reibungsfreie Bewegung aufgestellte Energiebilanz eine gewisse Änderung, und zwar dergestalt, daß durch die in den Kernen wirksame Flüssigkeitsreibung ständig Bewegungsenergie aufgezehrt wird. Die Folge davon dürfte eine allmähliche Veränderung des theoretischen Stromlinienbildes sein, die schließlich zu einer vollständigen Auflösung der Wirbelstraße führt. Die Möglichkeit, daß dieser Prozeß durch Störungen, die von den Begrenzungsflächen der Flüssigkeit ausgehen, mehr oder weniger stark beschleunigt wird, soll durch die vorstehende Betrachtung natürlich nicht ausgeschlossen werden.

(Eingegangen am 19. Oktober 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *W. Kaufmann*, München, Technische Hochschule.

[1] *L. Prandtl*, Einfluß der stabilisierenden Kräfte auf die Turbulenz. Vortr. aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete, S. 5. Aachen 1929.

Über die Beulsicherheit von Reckteckplatten mit querverschieblichen Rändern.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Die bisher durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen von Rechteckplatten beziehen sich vorwiegend auf Fälle, wo die dem Außendruck ausgesetzten Plattenränder entweder als gelenkig gestützt oder als eingespannt vorausgesetzt werden. In der technischen Praxis kommt es aber vor, daß ein in der Ebene der Platte belasteter Rand keine Stützung senkrecht zu dieser Ebene besitzt. Die Stabilität einer Rechteckplatte wird nun durch die fehlende Stützung an einem oder gar an mehreren ihrer Ränder so stark beeinträchtigt, daß eine genauere Untersuchung ihrer Beulsicherheit unter diesen besonderen Grenzbedingungen wohl angebracht erscheint.

Wir nehmen im folgenden eine isotrope, dünne Platte an; ihre kritische Belastung möge Druckspannungen verursachen, die unterhalb der Elastizitätsgrenze des Materials liegen. Wir wollen uns auf Stützungsfälle beschränken, die der strengen Behandlung zugänglich sind und beginnen gleich mit einem für das vorliegende Aufgabengebiet besonders aufschlußreichen Fall.

2. Rechteckplatte mit zwei gelenkig gestützten und zwei querverschieblichen Rändern. Die Ränder $x = 0$ und $x = a$ der Platte (Abb. 1) mögen gelenkig gestützt sein, die Ränder $y = \pm b/2$ seien querverschieblich. Ist p die parallel zur y-Achse wirkende Druckbelastung je Längeeinheit des Randes und bezeichnet weiter D die Biegesteifigkeit der Platte, so lautet die partielle Differentialgleichung ihrer verbeulten Mittelfläche

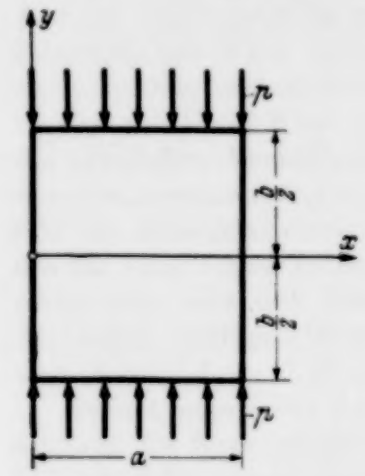

Abb. 1. Platte mit zwei querverschieblichen, einem gleichmäßigen Druck ausgesetzten Rändern.

$$\triangle\triangle w = -\frac{p}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{1}$$

worin unter $\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der *Laplace*sche Operator zu verstehen ist. Wir befriedigen die Grenzbedingungen an den Rändern $x = 0$, a, indem wir von dem üblichen Ansatz

$$w = Y_m \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Gebrauch machen, worin unter Y eine Funktion von y allein zu verstehen ist. Führen wir den Ausdruck (2) in die Gleichung (1) und setzen noch zur Abkürzung $k_m = p\,a^2/m^2\pi^2\,D$, so erhalten wir für Y die totale Differentialgleichung

$$Y_m^{IV} + (k_m - 2)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\,Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}\,Y_m = 0\,. \tag{3}$$

Ist einmal die kritische Belastung für den ersten Eigenwert $m = 1$ ermittelt, so können wir später, wie aus der Gleichung (3) hervorgeht, zu $m = 2, 3, \ldots$ übergehen, indem wir einfach den Wert a durch a/m ersetzen. Wir dürfen daher, ohne die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse einzuschränken, zunächst $m = 1$ annehmen und setzen dementsprechend auch

$$k = \frac{p\,a^2}{\pi^2\,D}\,. \tag{4}$$

Den Lösungsansatz für die Differentialgleichung (3) wählen wir in der Form

$$Y = \sum_{i=1}^{4} C_i\, e^{\frac{\pi\varkappa_i y}{a}} \tag{5}$$

mit den vier Integrationskonstanten C_i und erhalten zur Bestimmung der zugehörigen Werte des Faktors $\varkappa_i$ die Gleichung

$$\varkappa^4 + (k - 2)\,\varkappa^2 + 1 = 0\,. \tag{6}$$

Um den vier Freiwerten C_i entsprechend, ebensoviele Gleichungen anzuschreiben, benötigen wir zwei Grenzbedingungen längs jedem der beiden Ränder $y = \pm b/2$. Da das Biegemoment m_y

hier jedenfalls verschwinden muß, heißt die erste dieser Grenzbedingungen

$$m_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 , \tag{7}$$

worin ν die Querdehnungszahl bedeuten soll.

Um die zweite Randbedingung zu formulieren, benötigen wir eine Vereinbarung über das Verhalten der am Rande angreifenden Kräfte im Augenblick, wo sie den kritischen Wert erreicht haben und wo das Ausbeulen der Platte gerade beginnt. Nehmen wir z. B. an, daß diese Kräfte die infinitesimale Drehung der Platte um die beiden Geraden $y = \pm b/2$ mitmachen, so müssen wir die Grenzbedingungen des f r e i e n R a n d e s anschreiben, d. h. es wird dann die Auflagerreaktion

$$r_y = - D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 . \tag{8}$$

Man könnte unschwer nachweisen, daß die eben angeschriebene Randbedingung des freien Randes in Verbindung mit der Bedingung (7) auf keine reellen Werte für die kritische Belastung unserer Platte führen würde [1]. Die vom technischen Standpunkt aus sinnvollere Annahme ist die, daß die äußeren Kräfte ihre ursprüngliche Richtung auch an der in die benachbarte Gleichgewichtslage übergegangenen Platte beibehalten. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die an dem Plattenrande angreifende Belastung p nach den Richtungen der Tangente und der Normale zu der deformierten Mittelfläche der Platte zerlegen. Die letzte der beiden erwähnten Komponenten spielt dabei die Rolle einer Auflagerkraft. Sie hat in $y = - b/2$ die Größe $r_y = p \frac{\partial w}{\partial y}$, kann aber auch andererseits durch die Formel (8) ausgedrückt werden, während am Rande $y = + b/2$ die beiden obigen Ausdrücke für die negative Auflagerkraft gelten. Setzt man diese Ausdrücke einander gleich und beachtet noch die früher eingeführte Abkürzung (4), so erhält man die gesuchte Grenzbedingung in der Form

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\pi^2 k}{a^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 . \tag{9}$$

Indem wir jetzt auf die charakteristische Gleichung (6) zurückgreifen, stellen wir ihre Wurzel durch die Formel

$$\varkappa = \pm \sqrt{1 - \frac{k}{2} \pm i \sqrt{(4-k)k}} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{10}$$

dar. Man sieht, daß die Form der Funktionen Y und somit auch die Form der Gesamtlösung (2) wesentlich von der Größe k abhängt. Wir müssen hier drei Möglichkeiten, nämlich $k < 4$, $k = 4$ und $k > 4$ unterscheiden und beginnen gleich mit dem für das weitere wichtigsten

F a l l $k < 4$. Die vier Wurzeln (10) sind in diesem Fall paarweise konjugiert komplex und man kann ihnen die Form

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \pm (\lambda \pm i \mu) \\ \lambda &= \frac{\sqrt{4-k}}{2} , \quad \mu = \frac{\sqrt{k}}{2} \end{aligned}\right| \tag{11}$$

mit

geben. Die allgemeine Lösung (2) läßt sich somit in folgender Weise darstellen:

$$\left.\begin{aligned} w = \Big(A \operatorname{Sin} \frac{\lambda \pi y}{a} \cos \frac{\mu \pi y}{a} + B \operatorname{Cof} \frac{\lambda \pi y}{a} \sin \frac{\mu \pi y}{a} + C \operatorname{Cof} \frac{\lambda \pi y}{a} \cos \frac{\mu \pi y}{a} + \\ + D \operatorname{Sin} \frac{\lambda \pi y}{a} \sin \frac{\mu \pi y}{a} \Big) \sin \frac{\pi x}{a} . \end{aligned}\right| \tag{12}$$

Unterwirft man nun die elastische Fläche (12) den Grenzbedingungen (7) und (9) auf $y = \pm b/2$, so erhält man zur Bestimmung der vier Freiwerte A bis D ein System von ebenso vielen homogenen Gleichungen. Infolge der Symmetrie des Spannungszustandes hinsichtlich $y = 0$ spaltet sich dieses System in zwei voneinander unabhängige Systeme auf, von denen das erste nur die Konstanten A und B, das zweite nur C und D enthält. Der ersten Gleichungsgruppe ist eine in bezug auf die Gerade $y = 0$ a n t i m e t r i s c h e, der zweiten Gruppe eine s y m m e t r i s c h e

[1] Ähnliches gilt z. B. für einen Stab unter einer tangential gerichteten Druckkraft an seinem freien Ende, siehe *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 218. Berlin 1950.

elastische Fläche (12) zugeordnet. Wir gehen jetzt dazu über, diese beiden Beulformen im einzelnen zu betrachten.

a) Antimetrisches Beulen. Auf dem soeben beschriebenen Wege erhält man für die Konstanten A und B das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &A\,[(\lambda^2-\mu^2-\nu)\,\mathfrak{S}\mathrm{c}-2\lambda\mu\,\mathfrak{C}\mathrm{s}]+B\,[(\lambda^2-\mu^2-\nu)\,\mathfrak{C}\mathrm{s}+2\lambda\mu\,\mathfrak{S}\mathrm{c}]=0\,,\\ &A\,[(k\lambda+\lambda^3-3\lambda\mu^2-2\lambda+\nu\lambda)\,\mathfrak{C}\mathrm{c}-(k\mu-\mu^3+3\lambda^2\mu-2\mu+\nu\mu)\,\mathfrak{S}\mathrm{s}]\\ &\quad+B\,[(k\mu-\mu^3+3\lambda^2\mu-2\mu+\nu\mu)\,\mathfrak{C}\mathrm{c}+(k\lambda+\lambda^3-3\lambda\mu^2-2\lambda+\nu\lambda)\,\mathfrak{S}\mathrm{s}]=0,\end{aligned}\right| \qquad (13)$$

worin zur Abkürzung

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{Sin}\,\frac{\lambda\pi b}{2a}\,,\qquad \mathfrak{C}=\mathfrak{Cof}\,\frac{\lambda\pi b}{2a}\,,\qquad \mathrm{s}=\sin\frac{\mu\pi b}{2a}\,,\qquad \mathrm{c}=\cos\frac{\mu\pi b}{2a}$$

gesetzt ist.

Da die Gleichungen (13) homogen sind, können die beiden Konstanten nur dann von Null verschieden sein, wenn die Nennerdeterminante des Systems verschwindet. Die Erfüllung dieser Forderung führt auf die Beulbedingung

$$[(3+\nu)(1-\nu)-k]\sqrt{k}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi b\sqrt{4-k}}{2a}\right)\mp[k-(1-\nu)^2]\sqrt{4-k}\,\sin\left(\frac{\pi b\sqrt{k}}{2a}\right)=0\,, \qquad (14)$$

worin im vorliegenden Falle der Antimetrie das obere Vorzeichen zu nehmen ist. Wie aus (4) hervorgeht, ist die Beulbelastung bis auf einen konstanten Faktor gleich k, welche Größe durch (14) vollständig bestimmt ist. Wir wollen nun den Verlauf des Beulfaktors k in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis der Platte b/a verfolgen.

Eine offensichtliche Wurzel der Gleichung (14) ist

$$k_1=(3+\nu)(1-\nu)\,, \qquad (15)$$

sofern zugleich auch $\sin\frac{\pi b\sqrt{k_1}}{2a}$ verschwindet, welche letzte Bedingung die Beziehungen $\pi b\sqrt{k_1}=2n\pi a$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ und $b/a=2n/\sqrt{k_1}$ nach sich zieht.

Unsere k-Kurve schneidet also die Gerade $k=k_1$ regelmäßig in Abständen von $2/\sqrt{k_1}$. Mit $b/a\to\infty$ wächst auch die $\mathfrak{Sin}$-Funktion in der Beulformel (14) unbegrenzt. Der erste Klammerwert in dieser Formel strebt somit gegen Null und ergibt $k\to k_1$. Mit zunehmendem Verhältniswert b/a schmiegt sich also die k-Kurve immer mehr an die Gerade $k=k_1$ an. Im anderen Extremfall $b/a\to 0$ erhält man aus der Beulformel (14) den Grenzwert

$$k_0=2(1-\nu) \qquad (16)$$

Die k-Kurven sind für die beiden extremen Werte der Querdehnungszahl

$$\nu=0 \quad\text{und}\quad \nu=0{,}3$$

berechnet worden und in Abb. 2 samt den zugehörigen k_1-Geraden dargestellt. Man erhält insbesondere im Falle $\nu=0$ die Werte $k_0=2$, $k_1=3$ und für die Schnittpunkte mit der k_1-Geraden die Abszissen

$$b/a=2n/\sqrt{3}=1{,}155\,n;$$

für $\nu=0{,}3$ ergibt sich entsprechend $k_0=1{,}40$, $k_1=2{,}31$ und $b/a=2n/\sqrt{2{,}31}=1{,}316\,n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

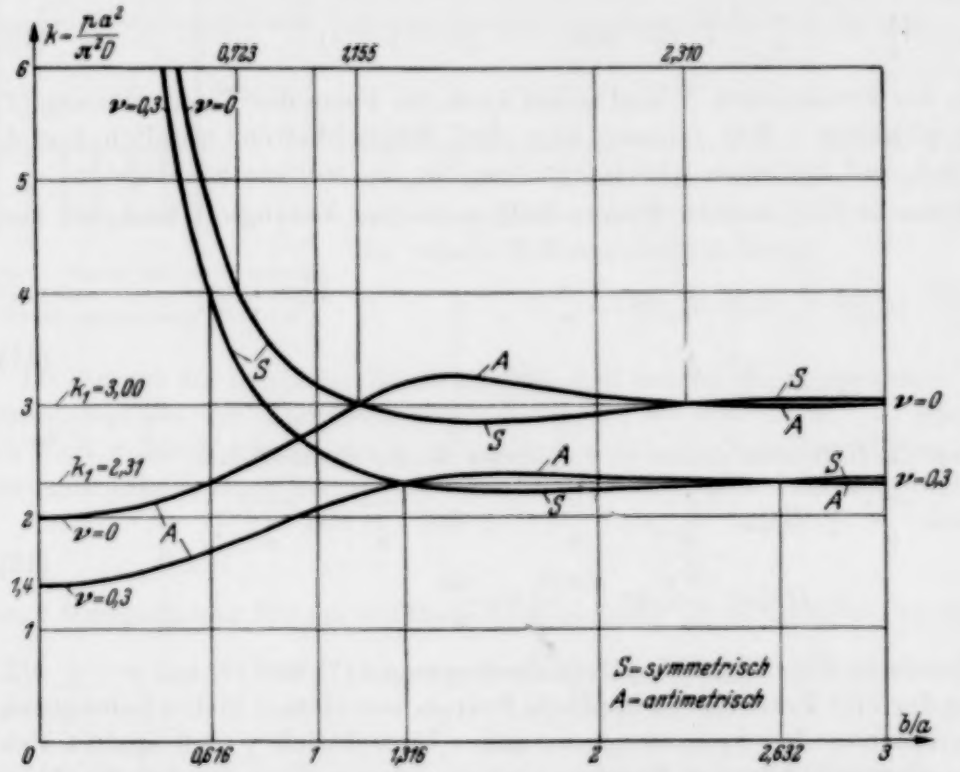

Abb. 2. Beulbelastung der Platte nach Abb. 1 in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis b/a für symmetrische und antimetrische Beulformen, sowie für $\nu=0$ und $\nu=0{,}3$.

Auf den Grenzfall mit dem Seitenverhältnis $b/a \to 0$, praktisch also auf den Fall eines schmalen Plattenstreifens, der in der Richtung senkrecht zu seinen langen, nicht abgestützten Rändern zusammengedrückt wird, lohnt es sich etwas ausführlicher einzugehen. Für diesen Plattenstreifen erhält man unter Beachtung von (4) und (16) die Beulbelastung

$$p_k = 2\,(1-\nu)\,\frac{\pi^2 D}{a^2}\,. \tag{17}$$

Zum Vergleich untersuchen wir die elastische Stabilität eines „in Gabeln" gelagerten Balkens mit einem konstanten rechteckigen Querschnitt, dessen Breite h klein sein soll gegen seine Höhe b, während b klein sein möge im Vergleich zu seiner Stützweite a. Dieser Balken sei einer beiderseitigen Druckbelastung von der Größe p je Längeneinheit ausgesetzt[1] (Abb. 3). Ist φ der Winkel, um den ein Element dieses Balkens von der Länge dx aus seiner ursprünglichen Lage ausgekippt ist und bezeichnet weiter M_t das durch die angenommene Verdrehung bedingte Torsionsmoment an der gleichen Stelle x, so gilt zunächst $\dfrac{dM_t}{dx}\,dx + p\,b \sin\varphi\,dx = 0$.

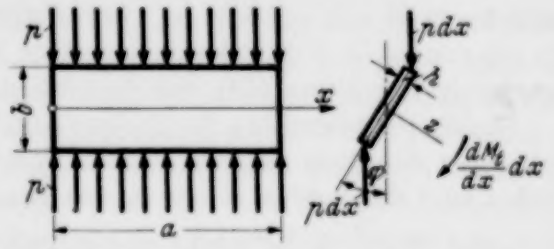

Abb. 3. Ebener Streifen und ausgekipptes Streifenelement unter Druckkräften.

Beschränkt man sich auf sehr kleine Winkel und linearisiert auf diese Weise das Problem, so folgt

$$\frac{dM_t}{dx} + p\,b\,\varphi = 0\,. \tag{18}$$

Andererseits besteht die Beziehung

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{C}\,, \tag{19}$$

sofern C die Torsionssteifigkeit des Balkenquerschnittes bezeichnet. Differenziert man (19) nach x und geht mit dem Ergebnis in (18) ein, so gewinnt man für φ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{p\,b}{C}\,\varphi = 0\,. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$\varphi = C_1 \sin\left(x\sqrt{\frac{p\,b}{C}}\right) + C_2 \cos\left(x\sqrt{\frac{p\,b}{C}}\right) \tag{21}$$

befriedigt die Endbedingungen nur dann, wenn die Konstante C_2 gleich Null und zugleich $a\sqrt{\dfrac{p\,b}{C}} = m\pi$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ gesetzt wird. Indem man insbesondere $m = 1$ wählt, erhält man für die kleinste kritische Belastung den Wert

$$p_k = \frac{\pi^2 C}{b\,a^2}\,. \tag{22}$$

Nun gilt für einen sehr schmalen rechteckigen Querschnitt von der Dicke h und der Höhe b näherungsweise $C = G\,b\,h^3/3$. Indem man hier den Gleitmodul G durch $E/2\,(1+\nu)$ ersetzt, kann man dem Wert C die Form

$$C = 2\,(1-\nu)\,\frac{E\,h^3\,b}{12\,(1-\nu^2)} = 2\,(1-\nu)\,D\,b \tag{23}$$

geben. Die Größe Db drückt hierbei die Biegesteifigkeit des Balkens in der xz-Ebene aus, sofern der Einfluß der Querdehnungszahl auf die in der Plattentheorie übliche Weise berücksichtigt wird. Führt man schließlich den vorstehenden Ausdruck in die Formel (22) ein, so heißt das Endergebnis in Übereinstimmung mit (17)

$$p_k = 2\,(1-\nu)\,\frac{\pi^2 D}{a^2}\,.$$

---

[1] Diese Aufgabe ist eng verwandt einerseits mit den wohlbekannten Kipp-Problemen, andererseits mit den zuerst von *R. Grammel* behandelten „Scherproblemen", vgl. Ing.-Arch. 17 (1949), S. 107. Die wesentliche Vereinfachung gegen das entsprechende Kipp-Problem besteht darin, daß die Belastung infolge ihrer Symmetrie zur Balkenachse keine Veranlassung zum Entstehen von Biegungsmomenten in der Ebene des Balkensteges und somit auch zu einer seitlichen Ausbiegung des Balkens im tordierten Zustand geben kann. Von den „Scherproblemen" unterscheidet sich die vorliegende Aufgabe durch die Verteilung der dort angenommenen Einzelkräfte über die Länge des ganzen Balkens.

Die soeben durchgeführte Vergleichsuntersuchung erhebt keinen Anspruch darauf, streng zu sein, zeigt aber jedenfalls, daß die antimetrische Knickung von streifenförmigen Rechteckplatten mit langen, wohl dem Druck ausgesetzten, aber nicht unterstützten Rändern viel mehr einem Auskippen gleicht, als einem Ausbeulen im üblichen Sinne dieses Wortes.

Sicherlich gibt es auch ein nicht scharf abzugrenzendes Gebiet von Ausweicherscheinungen, die sich nach Belieben und mit wenig voneinander abweichenden Ergebnissen entweder als Kipp- oder auch als Beulerscheinungen deuten und behandeln lassen.

b) Symmetrisches Ausbeulen. Die Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung (12) ergeben sich in ähnlicher Form wie zuvor; man braucht nur im System (13) A durch C und B durch D zu ersetzen, und alsdann $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{S}$ zu vertauschen. Die Bedingung für das Verschwinden der Nennerdeterminante erhält man wieder in der Form (14), wo diesmal das untere Vorzeichen zu wählen ist.

Die den Verlauf des Beulfaktors im Falle der Symmetrie repräsentierende k-Kurve (Abb. 2) schneidet die dem antimetrischen Fall zugeordnete k-Kurve in der Höhe der Geraden $k = k_1$. Dabei sind die beiden Kurven, von ihren Schnittpunkten abgesehen, stets durch die k_1-Gerade getrennt. Mit $\frac{b}{a} \to \infty$ strebt der Faktor k wiederum gegen den Wert $k_1 = (3 + \nu)(1 - \nu)$. Im Bereich $\frac{b}{a} < \frac{2}{\sqrt{k_1}}$ dagegen wächst der Faktor k monoton mit abnehmendem Verhältnis $\frac{b}{a}$ und erreicht schließlich mit dem Wert $k = 4$ die Gültigkeitsgrenze der bisher benutzten Lösung (12). Um den weiteren Verlauf der Kurve zu verfolgen, müssen wir somit weitere Lösungsformen der Differentialgleichung (3) heranziehen. Wir betrachten zunächst den

Fall $k = 4$. Der Ausdruck (10) liefert jetzt die beiden Doppelwurzeln $\varkappa_1 = \varkappa_2 = i$ und $\varkappa_3 = \varkappa_4 = -i$. Die allgemeine Lösung kann somit dargestellt werden in der Form

$$w = \left(A \sin \frac{\pi y}{a} + By \cos \frac{\pi y}{a} + C \cos \frac{\pi y}{a} + Dy \sin \frac{\pi y}{a}\right) \sin \frac{\pi x}{a} . \tag{24}$$

Durch Einführung der Grenzbedingungen und Nullsetzung der Determinante des Gleichungssystems für die Integrationskonstanten erhält man nun an Stelle einer Beulgleichung in k die folgende Bestimmungsgleichung für das Verhältnis $\frac{b}{a}$:

$$(3 - \nu) \sin \frac{\pi b}{a} \pm (1 - \nu) \frac{\pi b}{a} = 0 . \tag{25}$$

Das obere Vorzeichen (antimetrisches Ausbeulen) liefert in Übereinstimmung mit dem Verlauf der zugehörigen k-Kurve in Abb. 2 keine reelle Wurzel für die Unbekannte b/a, wohl aber entspricht eine solche reelle Wurzel dem unteren Vorzeichen (symmetrisches Ausbeulen). Insbesondere errechnet sich $b/a = 0{,}723$ für $\nu = 0$, sowie $b/a = 0{,}616$ für $\nu = 0{,}3$. Hiermit liegt auch der Schnittpunkt der Geraden $k = 4$ mit den zugehörigen k-Kurven eindeutig fest.

Fall $k > 4$. Auch dieser Bereich ist nur bei symmetrischer Ausbeulung der Platte von Bedeutung. Die rein imaginären Wurzeln der Gleichung (6) lassen sich jetzt in der Form $\varkappa = \pm i \varkappa_1$ bzw. $\varkappa = \pm i \varkappa_2$ mit

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \sqrt{\frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(k-4)\,k}} , \\ \varkappa_2 &= \sqrt{\frac{k}{2} - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{(k-4)\,k}} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

darstellen, und die zugehörige allgemeine Lösung heißt nun

$$w = \left(A \sin \frac{\pi \varkappa_1 y}{a} + B \sin \frac{\pi \varkappa_2 y}{a} + C \cos \frac{\pi \varkappa_1 y}{a} + D \cos \frac{\pi \varkappa_2 y}{a}\right) \sin \frac{\pi x}{a} . \tag{27}$$

Indem wir zum Ausschluß der Antimetrie $A = B = 0$ setzen und von den Randbedingungen (7) und (9) erneut Gebrauch machen, erhalten wir die Beulformel

$$(\varkappa_1^2 + \nu)^2 \, \varkappa_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \varkappa_2 b}{2a} - (\varkappa_2^2 + \nu)^2 \varkappa_1 \operatorname{tg} \frac{\pi \varkappa_1 b}{2a} = 0 , \tag{28}$$

die als eine Gleichung in k aufzufassen ist und den Verlauf der k-Kurven in Abb. 2 für $k > 4$ bestimmt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß im Bereich $\frac{b}{a} < \frac{2}{\sqrt{k_1}}$, worin $k_1 = (3+\nu)(1-\nu)$ sein soll, das antimetrische Beulen die kleinere Beulbelastung liefert; im Bereich $\frac{2}{\sqrt{k_1}} < \frac{b}{a} < \frac{4}{\sqrt{k_1}}$ ist das symmetrische Beulen ausschlaggebend und so geht es abwechselnd weiter. Bei dem Seitenverhältnis $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{k_1}}, \frac{4}{\sqrt{k_1}}, \frac{6}{\sqrt{k_1}}, \ldots$ sind beide Beulformen in gleicher Weise möglich; praktisch gilt dasselbe für die Platte mit einem sehr großem Verhältniswert b/a.

Es ist hier angebracht zu zeigen, daß die den Funktionen $\sin \frac{m\pi x}{a}$ mit $m = 2, 3, \ldots$ zugeordneten Eigenwerte keine Rolle für die Bestimmung der kleinsten kritischen Belastung spielen können. Will man in der Tat an Stelle von $m = 1$ einen höheren Eigenwert berücksichtigen, so hat man zunächst den Beulfaktor k nicht nach dem Verhältniswert b/a, sondern nach dem Verhältniswert mb/a mit $m = 2, 3, \ldots$ zu bestimmen. Wie die Abb. 2 zeigt, verschiebt sich dadurch der Wert k wenn überhaupt, so nur ganz geringfügig nach unten; da aber die Beulbelastung selbst proportional dem Wert km^2 ist, so kann die Vervielfachung des ersten Eigenwertes $m = 1$ auf keinen Fall zu einer Verringerung dieser Beulbelastung führen.

Die zu dem jeweils niedrigsten Eigenwert gehörigen Gleichgewichtsfiguren für Platten mit einem Seitenverhältnis von $\frac{b}{a} = 1$ und $\frac{b}{a} = 2$ sind für $\nu = 0{,}3$ in Abb. 4 wiedergegeben. Wie aus Abb. 2 hervorgeht, entspricht der kleinsten Beulbelastung im Falle der Rechteckplatte mit $b = 2a$ eine antimetrische Beulform. Es ist weiter zu bemerken, daß es Beulformen ohne Knotenlinien in unserem Stützungsfall überhaupt nicht gibt; dabei zeigt eine antimetrische Beulfläche stets eine ungerade, die symmetrische stets eine gerade Anzahl von Knotenlinien in der Richtung senkrecht zu der Druckrichtung. Die der kleinsten kritischen Belastung entsprechende Anzahl dieser Knotenlinien wächst zugleich mit dem Seitenverhältnis b/a. Auf die Einzelheiten der Beulformen gehen wir nicht ein, da sie für die Bestimmung der Beulbelastung ohne Bedeutung sind.

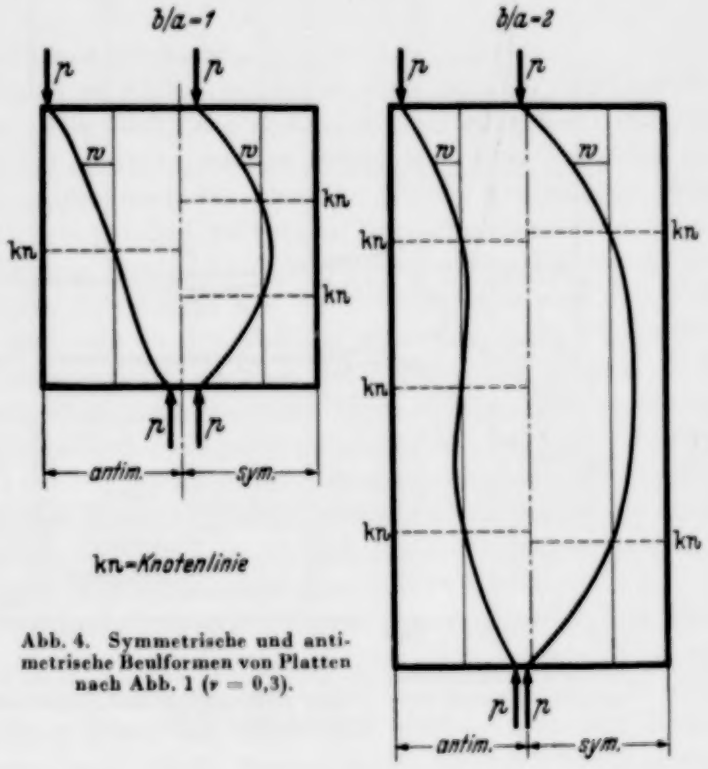

Abb. 4. Symmetrische und antimetrische Beulformen von Platten nach Abb. 1 ($\nu = 0{,}3$).

3. Rechteckplatte mit drei gestützten und einem querverschieblichen Rand. Die Platte möge an den Rändern $x = 0$, $x = a$ und $y = 0$ gelenkig gestützt, am Rande $y = b$ querverschieblich sein und habe wieder einen gleichförmigen Druck p in der Richtung y aufzunehmen. Beult sich eine solche Platte aus, so ist ihre elastische Fläche mit der halben Fläche einer Rechteckplatte identisch, deren Seitenlängen gleich a und $2b$ sind, die längs ihrer beiden belasteten Ränder $y = \pm b$ keine Stützung besitzt und sich derart ausbeult, daß sowohl ihre Durchbiegung als auch die Biegemomente auf der Geraden $y = 0$ verschwinden.

Allen diesen Bedingungen genügt die im vorigen Abschnitt behandelte Platte, sofern nur ihre Beulfläche eine zu der Achse $y = 0$ antimetrische Form aufweist. Die uns interessierende kritische Belastung ist somit durch die Beulbedingung (14), und zwar mit dem oberen Vorzeichen, gegeben, wobei lediglich die Seitenlänge b durch $2b$ ersetzt werden muß. Der Verlauf des Beulfaktors $k = p a^2/\pi^2 D$ in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis b/a ist in Abb. 5 dargestellt.

4. Rechteckplatte mit zwei gestützten Rändern, einem eingespannten und einem querverschieblichen Rand. Die Anordnung bleibt dieselbe wie vorhin, nur möge der Rand $y = 0$ eingespannt sein. Wir machen von der im Abschnitt 2 gewonnenen Lösung in ihren drei verschiedenen Formen erneut Gebrauch. Die Grenzbedingungen am Rande $y = b$ drücken sich wieder durch die Beziehungen (7) und (9) aus. Die Randbedingungen längs der Einspannung bei $y = 0$

lauten nunmehr $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Je nachdem, wie groß die kritische Belastung ausfällt, müssen wir wieder drei Fälle unterscheiden:

1. Fall $k < 4$. Die Lösungsform (12) führt in Verbindung mit den soeben angeführten Grenzbedingungen auf die Beulgleichung

$$\left.\begin{aligned}[k^2 - (3+\nu)(1-\nu)k]\,\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{\pi b}{2a}\sqrt{4-k}\right) - [k-(1-\nu)^2](4-k)\cos^2\left(\frac{\pi b\sqrt{k}}{2a}\right)\\ - (k-2+2\nu)^2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

2. Fall $k = 4$. Indem man diesmal die Lösung (24) benützt, gelangt man zu der Beziehung

$$\left(\frac{\pi b}{a}\right)^2(1+\nu)^2 - (3+2\nu-\nu^2)\cos^2\left(\frac{\pi b}{a}\right) - 1 = 0\,, \tag{30}$$

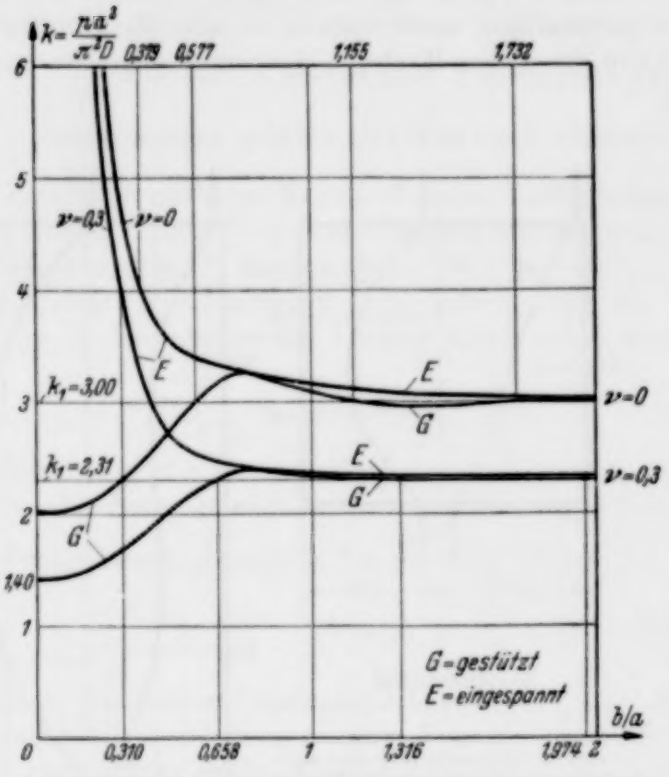

Abb 5. Beulbelastung der einseitig frei gestützten, sowie der einseitig eingespannten Platte in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis b/a für $\nu = 0$ und $\nu = 0{,}3$.

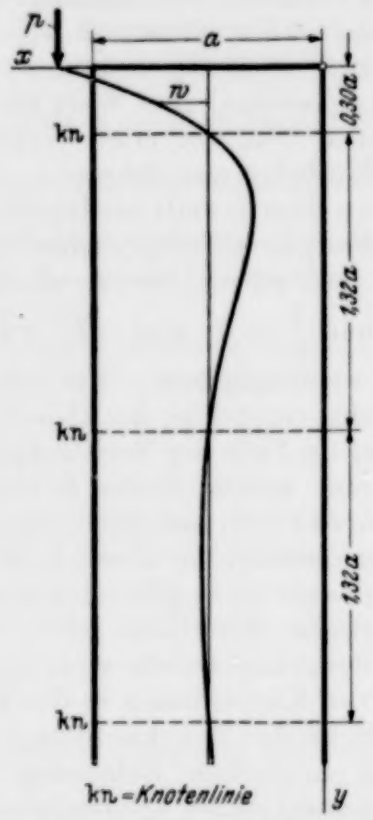

Abb. 6. Beulform des unendlichen, einem Längsdruck ausgesetzten Halbstreifens mit nicht gestütztem Querrand.

die es wieder gestattet, den dem Beulfaktor $k = 4$ zugeordneten Verhältniswert b/a zu ermitteln und somit die beiden Bereiche $k < 4$ und $k > 4$ abzutrennen. Man erhält insbesondere den Wert $b/a = 0{,}379$ für $\nu = 0$ und den Wert $b/a = 0{,}310$ für $\nu = 0{,}3$.

3. Fall $k > 4$. Die Beulbedingung ergibt sich hier auf Grund der Lösungsform (27) und hat die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}[(k-2+\nu)^2 + \nu^2 - 2]\cos\frac{\pi\varkappa_1 b}{a}\cos\frac{\pi\varkappa_2 b}{a}\\ + [(k-2)(1+\nu^2) + 2\nu]\sin\frac{\pi\varkappa_1 b}{a}\sin\frac{\pi\varkappa_2 b}{a} - 2[\nu k + (1-\nu)^2] = 0\,,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

wobei für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Ausdrücke (26) einzusetzen sind. Der durch die Gleichungen (29) bis (31) festgelegte Verlauf des Beulfaktors k ist ebenfalls in Abb. 5 wiedergegeben.

5. Der unendliche Halbstreifen mit ungestütztem Querrand. Wächst das Seitenverhältnis b/a der Rechteckplatte unbegrenzt, so strebt der Beulfaktor k bei allen bisher behandelten Arten von Stützung gegen einen und denselben Wert, nämlich $k = (3+\nu)(1-\nu)$. Natürlich können wir zu diesem Ergebnis auch auf einem direkten Wege gelangen; zu diesem Zweck betrachten wir einen unendlichen Halbstreifen (Abb. 6), dessen lange Seiten gelenkig gestützt sind und dessen kurzer, querverschieblicher Rand $y = 0$ in der Mittelebene der Platte eine gleichförmige Druckbelastung aufzunehmen hat. Nehmen wir weiter an, daß diese Belastung nicht etwa nach

den Seitenrändern $x = 0$ und $x = a$ abgetragen, sondern erst durch einen Gegendruck im Unendlichen ausgeglichen wird, so dürfen wir wieder von der Differentialgleichung (3) ausgehen. Die durch das Endergebnis begründete Annahme von $k < 4$ berechtigt uns weiter zur Wahl der allgemeinen Lösung (12), der wir jetzt die speziellere Form

$$w = \left(A e^{-\frac{\lambda \pi y}{a}} \cos \frac{\mu \pi y}{a} + B e^{-\frac{\lambda \pi y}{a}} \sin \frac{\mu \pi y}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \tag{32}$$

geben. Es ist hier nach wie vor $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{4-k}$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{k}$, während k mit der Druckbelastung p durch die Relation (4) verknüpft ist. Man braucht nur noch, die Funktion (32) den Grenzbedingungen (7) und (9) zu unterwerfen, um zu der Beulbedingung

$$k = k_1 = (3 + \nu)(1 - \nu) \tag{33}$$

zu gelangen. Den Werten $\nu = 0$ bis $\nu = 0{,}3$ entsprechend, liegt der Beulfaktor zwischen $k = 3$ und $k = 2{,}31$. Die Beulfläche ist nun durch den Ausdruck

$$w = c \left[(1 + \nu) \cos \frac{\mu \pi y}{a} - \sqrt{k_1} \sin \frac{\mu \pi y}{a} \right] e^{-\frac{\lambda \pi y}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \tag{34}$$

gegeben, worin c eine willkürliche Konstante bedeuten soll.

Wie ein Längsschnitt durch die Beulfläche in Abb. 6 zeigt, verwirft sich der Halbstreifen nach sehr rasch abklingenden Wellenzügen. Die Wahl der gedämpften Lösungsform (32), die ein solches Ausbeulen bedingt, kann plausibel gemacht werden, wenn man zum Vergleich mit dem Halbstreifen einen unendlichen Vollstreifen von der gleichen Breite heranzieht. Wird dieser Vollstreifen einem gleichförmigen Druck parallel zu seinen Begrenzungsgeraden ausgesetzt, so verbeult er sich nach einer unendlichen Anzahl von nicht gedämpften Wellen; die zugehörige kritische Belastung entspricht einem Beulfaktor $k = 4$. Schlitzt man nun den Vollstreifen senkrecht zu seinen Rändern auf und fügt in den Schlitz eine gelenkige Verbindung ein, die die beiden Ufer des Schlitzes zusammenhält, so wird der Vollstreifen in zwei Halbstreifen zerlegt, deren Belastung und Randbedingungen dieselben sind, wie bei dem vorhin behandelten Halbstreifen. Die Schwächung durch das eingebaute „Gelenk" bedingt, wie man sieht, eine Verringerung der Beullast um 25 bis 42% je nach der Querdehnungszahl. Es leuchtet indessen ein, daß diese abgeminderte kritische Belastung nicht imstande sein kann, ein ungedämpftes Ausbeulen des unendlichen Streifens zu erzwingen, so daß dieses Ausbeulen praktisch auf die nächste Umgebung des Gelenkes bzw. des Querrandes beschränkt bleibt.

Man kann auch den Beulflächen von Rechteckplatten mit einem querverschieblichen Rand eine andere Deutung geben, wenn man sich die Vorstellung von dem „Liniengelenk" in entsprechender Weise zunutze macht. Es sei zum Beispiel eine ringsum frei gestützte, in einer Richtung zusammengedrückte Rechteckplatte durch ein derartiges, senkrecht zu der Druckrichtung eingebautes Gelenk (oder auch durch einen nicht biegungsfest gedeckten Stoß) in zwei gleiche Rechtecke aufgeteilt. Die Beulbedingungen für jede halbe Platte sind dann genau dieselben wie bei der im Abschnitt 3 behandelten Rechteckplatte.

Spannt man die beiden dem Druck ausgesetzten Ränder der Platte ein, anstatt sie zu stützen, so werden die Beulbedingungen einer jeden halben Platte identisch mit denjenigen der Rechteckplatte nach Abschnitt 4. Die kritischen Belastungen können in diesen beiden Fällen aus den Kurven in Abb. 5 abgelesen werden, sofern man als b die (in der Druckrichtung) gemessene Entfernung vom Gelenk bis zum Plattenrand, d. h. die halbe Seitenlänge der ungeteilten Rechteckplatte, in Rechnung stellt.

(Eingegangen am 30. Oktober 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. S. *Woinowsky-Krieger*, Quebec P. Q. (Canada)
200 Av. Marguerite Bourgeoys, Apt. 8.

Über den abgelösten Verdichtungsstoß *.

Von H. Melkus.

1. Einleitung. Bei der Umströmung eines Hindernisses im Überschallbereich, oder umgekehrt, bei der Ausweichbewegung eines Gases, in dem sich ein Körper mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, treten vielfach Verdichtungsstöße auf. Die damit verbundenen Energieverluste sind, im Gegensatz zu den durch Ablösung oder Reibung verursachten, zähigkeitsunabhängig, d. h. sie sind in gleichem Maße in idealen als auch in reibungsbehafteten Gasen vorhanden.

Die Schicht, in der sich beim Verdichtungsstoß der Übergang von einem Gaszustand in den anderen vollzieht, ist im allgemeinen sehr dünn. Man kann sie daher durch eine Diskontinuitätsfläche, die sogenannte Stoßfront, ersetzen, in der sowohl der Geschwindigkeitsvektor als auch die zugehörigen Zustandsgrößen des Gases: der Druck p, die Dichte ϱ, die Temperatur T und die Entropie e sprunghaften Änderungen unterworfen sind.

Die Änderungen des Geschwindigkeitsvektors und des Gaszustandes sowie die Größe der Energieverluste sind eng mit dem Neigungswinkel γ der Stoßfront zur Anströmrichtung verknüpft. Der formelmäßige Zusammenhang der einzelnen Größen mit dem Stoßfrontparameter γ ist in besonders einfacher Weise bei *F. Schubert*[1] dargestellt. Danach sind für einen vorgegebenen Anströmungszustand die Änderungsbeträge der entsprechenden Zustandsgrößen und Geschwindigkeiten um so größer, je steiler die Stoßfront zur Anströmrichtung verläuft. Ihr Maximum erreichen sie beim senkrechten Stoß.

Der Stoßfrontverlauf und seine Lage relativ zum Körper hängen wesentlich vom Strömungszustand des Gases (seinen skalaren Zustandsgrößen und seiner Geschwindigkeit) im Anströmgebiet sowie von der Form des Körpers selbst ab. Schlierenaufnahmen zeigen, daß bei schlanken kegelförmigen Körpern die Stoßfront ebenfalls als Kegel erscheint, dessen Erzeugende von der Körperspitze ausgeht. Vielfach ist aber die Stoßfront eine vor dem Körper liegende gekrümmte Fläche, die mit ihrer konkaven Seite dem Körper zugewandt ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als abgelösten Verdichtungsstoß. Sie tritt im allgemeinen dann auf, wenn die Stirnseite des Körpers stumpf ist, doch kommt sie auch bei kegelförmigen Körperspitzen mit hinreichend großem Öffnungswinkel vor.

Auch bei Beschränkung auf ebene oder rotationssymmetrische Probleme ist die theoretische Untersuchung eines solchen Geschwindigkeitsfeldes mit erheblichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden, weil die Strömungsgeschwindigkeiten hinter derartigen Fronten teils über, teils unter der Schallgrenze liegen. Jeder Bereich erfordert eine gesonderte Behandlung, da die Differentialgleichung der Bewegung im ersten Fall vom elliptischen, im zweiten vom hyperbolischen Typus ist.

Außerdem sind die Grenzen dieser Bereiche von vornherein nicht bekannt, da die Strömung hinter dem Verdichtungsstoß von der Form der Stoßfront wesentlich beeinflußt wird und der Stoßfrontverlauf selbst von der Körperform, d. h. von der Geschwindigkeitsverteilung in der Körperumgebung abhängig ist. Hier liegt daher keine einfach definierte Randwertaufgabe vor. Die Stoßfront muß gleichzeitig mit dem Strömungsfeld bestimmt werden, und zwar durch schrittweise Annäherung. Schließlich sind noch wegen der veränderlichen Stoßfrontneigung die Stoßverluste von Stromlinie zu Stromlinie verschieden. Eine solche Strömung ist aber nicht mehr isentropisch und nach dem Satz von *Bjerknes* nicht mehr drehungsfrei.

Diese Besonderheiten der Strömung sind wohl der wesentlichste Grund dafür, daß exakte Lösungen dieser Aufgabe meines Wissens zur Zeit nicht bekannt sind.

L. Crocco[2] hat in einer 1937 erschienenen Arbeit angegeben, daß eine Lösung dieses Problems durch Anwendung der Methode der schrittweisen Approximation möglich sei. Nähere Angaben darüber sind jedoch in dieser Arbeit nicht enthalten.

---

* Gekürzte Fassung einer von der Technischen Hochschule Braunschweig genehmigten Dissertation. Die Arbeit ist im Institut für Strömungsforschung der *Max Planck*-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften entstanden; für die Anregung und tatkräftige Unterstützung bei der Durchführung derselben bin ich Herrn Prof. Dr. *A. Betz* sehr zu Dank verpflichtet. Für wertvolle Ratschläge möchte ich fernerhin Herrn Dr. *W. Wuest* und Herrn Dr. *F. Riegels* danken.

[1] *F. Schubert*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 129.

[2] *L. Crocco*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 1.

A. Betz[1] hat 1946 in seinem in St. Louis gehaltenen Vortrage die Eigenschaften der Strömung hinter einem abgelösten Verdichtungsstoß allgemein diskutiert sowie einige Betrachtungen über die Geschwindigkeitsverhältnisse auf der Symmetrieachse zwischen Stoßfront und Körper durchgeführt. Gleichzeitig hat er auf gewisse Möglichkeiten hingewiesen, die eine mathematische Behandlung dieses Problems gestatten. Die vorliegende Arbeit stützt sich im wesentlichen auf diese Angaben.

J. W. Maccoll[2] berichtete 1946 über ein Rechenverfahren[3] für die Berechnung des abgelösten Verdichtungsstoßes und wandte es bei der Ermittlung des Strömungsverlaufs bei keilförmigen Körpern an. Das Verfahren von *Maccoll* besteht darin, daß zunächst der Verlauf der Schallgrenze in der Strömung hinter dem Stoß näherungsweise berechnet wird. Anschließend läßt sich der Unterschallbereich, der durch die Stoßfront, die Schallgrenze und die Körperkontur begrenzt ist, unter Anwendung der Relaxationsmethode ermitteln.

G. Drougge[4] erweiterte dieses Verfahren auf die Berechnung des Strömungsfeldes bei kegelförmig zugespitzten Zylindern. Es wird der Stoßfrontverlauf Schlierenaufnahmen entnommen und der Verlauf der Schallgrenze im Strömungsfeld aus dem Stoßfrontverlauf und der Körperkontur ermittelt. Hierbei kann aus dem experimentell bekannten Stoßfrontverlauf der Anfangspunkt und die Neigung der Schallgrenze an der Stoßfront rechnerisch erschlossen werden. Da fernerhin an der Übergangsstelle von der kegeligen Spitze zum zylindrischen Teil ein Verdünnungsfächer entsteht, so läßt sich auch hier die Schallgrenze nach Ort und Richtung festlegen.

Sowohl bei *Maccoll* als auch bei *Drougge* ist der Ort der Schallgrenze am Körper durch die einfache Körperform vorgegeben, während im allgemeinen die Ermittlung dieser Stelle schwierig ist. Das Verfahren läßt sich daher dann gut anwenden, wenn die Stoßfront sowie der Ort und die Neigung der Schallgrenze am Körper von vornherein festliegen.

In einer 1948 erschienenen Arbeit untersucht *J. Dugundji*[5] den abgelösten Verdichtungsstoß an Rotationskörpern. Dabei stellt er eine Beziehung zwischen der Krümmung am Scheitel der Stoßfront, der Nasenkrümmung des Rotationskörpers und dem Abstand des Scheitels der Stoßfront von der Körperspitze auf. Das dabei angewandte Rechenverfahren besteht darin, die Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse hinter dem Stoß in eine Potenzreihe zu entwickeln, wobei Glieder bis zum dritten Grad berücksichtigt werden.

2. Aufgabenstellung. In der vorliegenden Arbeit werden für ebene Strömungen Beziehungen für die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld hinter der Stoßfront aufgestellt, wodurch gewisse Aussagen über die dort herrschenden Geschwindigkeitsverhältnisse gemacht werden können. Als Beispiel wird mit Hilfe dieser Beziehungen die Entfernung des Stoßfrontscheitels vom angeströmten Körper ermittelt. Die Beziehungen sind unter den Voraussetzungen, daß 1. im Anströmgebiet isentropische Parallelströmung herrscht, 2. das Gas reibungsfrei ist und 3. es sich um einen stationären Vorgang handelt, aufgestellt.

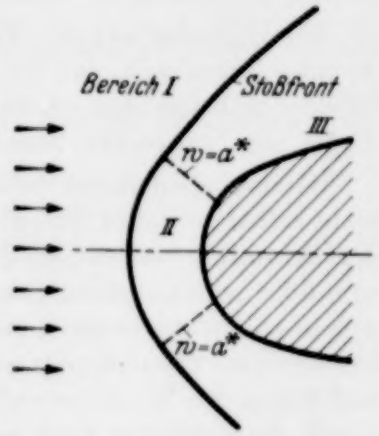

Abb. 1. Strömungsbereiche beim abgelösten Verdichtungsstoß.

Das Strömungsfeld um einen Körper kann in drei Bereiche unterteilt werden (Abb. 1):

1. den stromaufwärts der Stoßfront gelegenen, durch das Vorhandensein des Körpers unbeeinflußt gebliebenen Bereich I mit überall konstanter Wärmeenergie und Geschwindigkeit;

2. den durch den mittleren Teil der Stoßfront, die beiden Schallgrenzlinien $w = a^*$ und die Körperkontur abgegrenzten Bereich II mit Unterschallgeschwindigkeit, wobei w der Betrag der Geschwindigkeit und a^* die kritische Schallgeschwindigkeit sind;

3. den durch die übrigen Teile der Stoßfront und der Körperkontur sowie die Schallgrenzlinien begrenzten Bereich III mit Überschallgeschwindigkeit.

---

[1] *A. Betz*, Über den abgelösten Verdichtungsstoß. Vortrag auf der Gasdynamiktagung in St. Louis, Oktober 1946.

[2] *J. W. Maccoll*, Investigations of Compressible Flow at Sonic Speeds, The Sixth International Congress for Applied Mechanics. Paris 1946.

[3] Die Arbeit von *J. W. Maccoll* ist dem Verfasser nicht zugänglich gewesen.

[4] *G. Drougge*, The Flow around Conical Tips in the Upper Transsonic Range. Report 25 (1948) Flygtekniska Försökanstalten Stockholm.

[5] *J. Dugundji*, J. aeronaut. Sci. 15 (1948), 2, S. 699.

Es ist durchaus möglich, daß bei großen Machzahlen der Anströmung im Bereich III auch noch örtliche Felder mit Unterschallgeschwindigkeit eingeschlossen sind. Wie *W. Tollmien*[1] zeigte, bilden sich in Nachbarschaft einer stetig gekrümmten konvexen Wandkontur unter gewissen Bedingungen Verdichtungsstöße aus, selbst wenn die Überschallströmung wirbelfrei angenommen wird. Das Vorhandensein solcher Felder kann aber den Stoßfrontverlauf in der näheren Umgebung des Körpers sicherlich nur wenig beeinflussen, da sie sich im Überschallgeschwindigkeitsbereich stromaufwärts nicht fortpflanzen können.

Die Hauptschwierigkeit bei der Ermittlung der Lage und Form der Stoßfront liegt in der Bestimmung der Umrandung des Gebietes II. Kennt man dieselbe, so läßt sich auch der Strömungsverlauf in diesem Bereich ermitteln, da ja bei Vorgabe der Randbedingungen eine Differentialgleichung vom elliptischen Typus formal lösbar ist. Ist fernerhin der Schnittpunkt der Schallgrenzlinie mit der Stoßfront bekannt, so läßt sich anschließend der Stoßfrontverlauf zwischen den Gebieten I und III ermitteln, wobei der Aufbau der Stoßfront nach dem *Prandtl-Busemann*schen, auf Strömungen mit Verdichtungsstößen erweiterten Charakteristikenverfahren vollzogen werden kann.

3. Allgemeine Angaben über die Durchführung der Rechnung. Die Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld hinter der Stoßfront wird folgendermaßen durchgeführt:

Man bestimmt die Geschwindigkeitsverteilung längs einer Stromlinie an einer durch die Stoßfrontneigung γ gekennzeichneten Stelle bei vorgegebenen Anströmverhältnissen p_1, ϱ_1, sowie die Machzahl $M_1 = w/a_1$ und zwar unter Berücksichtigung der durch den Stoßvorgang hervorgerufenen Änderungen des Gaszustandes und des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{w}$. Die Geschwindigkeitsänderung in Richtung einer Stromlinie sowie ihre höheren Ableitungen nach der Stromlinienkoordinate lassen sich für jede Stelle an der Stoßfront anschreiben, sobald die Krümmung der Stoßfront sowie (für die höheren Ableitungen) der Verlauf der Krümmung längs der Stoßfront selbst festliegt. Es ist daher naheliegend die Geschwindigkeitsänderung durch einen zunächst noch unbekannten Krümmungsradius R auszudrücken sowie eine bestimmte, durch Versuche erhärtete Krümmungsänderung anzunehmen. Damit lassen sich die Größen w, $\partial w/\partial s$, $\partial^2 w/\partial s^2$ usw. für jeden Punkt der Stoßfront als Funktionen des Neigungswinkels γ der Stoßfront, der Machzahl M_1 der Anströmung und dem dazugehörigen Krümmungsradius R ausdrücken. Sind für einen Punkt unmittelbar hinter der Stoßfront die Geschwindigkeit und deren partiellen Ableitungen bekannt, so läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung in nächster Umgebung des betrachteten Punktes mittels einer *Taylor*-Reihe darstellen, wobei als Parameter der Krümmungsradius der Stoßfront erscheint.

Mit Hilfe der aus der *Taylor*-Reihe gewonnenen Geschwindigkeitsverteilung kann man durch Extrapolation z. B. auf der Symmetrieachse den Ort ermitteln, wo die Strömungsgeschwindigkeit infolge endlicher Krümmung der Stoßfront auf Null abgebremst wird. Dieses bedeutet, daß diese Stelle ein Staupunkt, somit ein Punkt des Körpers ist.

Bei dem eben skizzierten Rechenverfahren wurden keinerlei Voraussetzungen über die Körperform selbst gemacht, die aber, zumindestens in Körpernähe, die Geschwindigkeitsverteilung auf der Stromlinie wesentlich beeinflußt. Wollte man den Einfluß der Körperform extra erfassen, so müßte man in einem gesonderten Rechengang das Geschwindigkeitsfeld um einen Körper, der sich in einem isoenergetischen aber nicht isentropischen (drehungsfreien) Strömungsfeld befindet, bestimmen. Hierbei tritt sofort als Erschwernis der Umstand hinzu, daß die Entropieänderung und somit die Wirbelverteilung auf den Stromlinien nicht von vornherein gegeben ist, da sie ja durch die zunächst noch unbekannte Stoßfrontform vorgeschrieben wird.

Nach Vorschlag von Prof. *A. Betz* könnte man von einer auf der Symmetrieachse gewählten Geschwindigkeitsverteilung ausgehen, die im wesentlichen von der beabsichtigten Kopfform des Körpers abhängt, und den Scheitel der Stoßfront so legen, daß dort die Geschwindigkeit selbst sowie die dazugehörigen Ableitungen des durch den Körper bedingten Strömungsfeldes mit den entsprechenden Größen eines Geschwindigkeitsfeldes hinter einer Stoßfront übereinstimmen. Dadurch sind Lage und Krümmung des Stoßfrontscheitels festgelegt. Durch schrittweises Vorgehen quer zur Strömungsrichtung in dem der Symmetrieachse benachbarten Strömungsfeld und durch Herantasten mittels wiederholtem Anbringen von Korrekturen, deren Einfluß ihrer Geringfügigkeit wegen sich linearisieren läßt, kann die Stoßfront aufgebaut werden.

---

[1] *W. Tollmien* u. *M. Schäfer*, Ausbildung eines Verdichtungsstoßes in der Nachbarschaft einer konvexen stetig gekrümmten Wandkontur, AVA-Bericht 114 (1946).

4. Zusammenstellung der Grundgleichungen. In einer Strömung mit Verdichtungsstößen erfolgen die Zustandsänderungen eines Gases ohne Wärmezufuhr. Daher bleibt im stationären Fall die Summe der kinetischen Energie $w^2/2$ und des Wärmeinhaltes (der Enthalpie) i der Masseneinheit eines strömenden Gases längs eines Stromfadens konstant. Mit

$$i = c_p T = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho} + C \tag{1}$$

und $\varkappa = c_p/c_v$ kann der Energiesatz folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho} = \frac{w_{max}^2}{2}. \tag{2}$$

Setzt man isoenergetischen Gaszustand im Anströmgebiet voraus, so hat die Konstante $w_{max}^2/2$ an jeder Stelle des Strömungsfeldes denselben Wert.

Die Verluste, die das Gas beim Durchschreiten einer Stoßfront erleidet, äußern sich in einer Verminderung seiner mechanischen Energie. Sie können daher durch die Angabe der Ruhedruckänderung erfaßt werden. Bezieht man den Ruhedruck p_R eines Stromfadens hinter dem Stoß auf den Ruhedruck der Ausgangsströmung p_{R_1}, so ist das Druckverhältnis

$$\frac{p_R}{p_{R_1}} = K, \tag{3}$$

das man als Drosselfaktor bezeichnet, ein Maß für die Höhe der auftretenden Verluste.

Mit der Änderung des Ruhedruckes p_R eines Stromfadens beim Durchschreiten der Stoßfront ist eine entsprechende Änderung der Ruhedichte ϱ_R verbunden und es gilt[1]

$$\frac{p_R}{p_{R_1}} = \frac{\varrho_R}{\varrho_{R_1}} = K \tag{4}$$

Laut Definition des Ruhedrucks und der Ruhedichte folgt weiterhin:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_R}{\varrho_R} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} = \frac{w_{max}^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_{R_1}}{\varrho_{R_1}}. \tag{5}$$

In einem isoenergetischen, aber nicht isentropischen Strömungsfeld (z. B. Strömung hinter einer gekrümmten Stoßfront) ist im *Poisson*schen Gesetz

$$\frac{p}{\varrho^\varkappa} = \frac{p_R}{\varrho_R^\varkappa} = \overline{C} \tag{6}$$

die Größe $\overline{C}$ jeweils nur längs einer Stromlinie konstant, aber von Stromlinie zu Stromlinie verschieden, also eine Funktion der Stromfunktion Ψ.

Durch Verknüpfung der *Poisson*schen Gleichung (6) mit (5) erhält man für den Druck p und die Dichte ϱ

$$p = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \varrho (w_{max}^2 - w^2) = \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa 2} (w_{max}^2 - w^2)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \left[\frac{1}{C(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{7}$$

$$\varrho = p \left[\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} (w_{max}^2 - w^2)\right]^{-1} = \left[\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} (w_{max}^2 - w^2)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \left[\frac{1}{C(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{8}$$

sowie für den Ruhedruck p_R und die Ruhedichte ϱ_R

$$p_R = \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} w_{max}^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \left[\frac{1}{\overline{C}(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} = \text{konst}_1 \left[\frac{1}{\overline{C}(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \tag{9}$$

$$\varrho_R = \left(\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} w_{max}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \left[\frac{1}{\overline{C}(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}} = \text{konst}_2 \left[\frac{1}{\overline{C}(\Psi)}\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}. \tag{10}$$

Hieraus folgt

$$p = p_R \left(1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \qquad \varrho = \varrho_R \left(1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}. \tag{7a), (8a)}$$

[1] *R. Sauer*, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Berlin 1943.

Mit $a_R = \sqrt{\varkappa p_R/\varrho_R} = \sqrt{(\varkappa-1)/2}\, w_{max}$ als Schallgeschwindigkeit des Gases im Ruhezustand und $a = \sqrt{\varkappa p/\varrho}$ als lokale Schallgeschwindigkeit erhält man die Beziehung

$$\frac{a}{a_R} = \sqrt{1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}}\,. \tag{11}$$

Es kann daher für den Druck und die Dichte an jeder Stelle des Strömungsfeldes auch geschrieben werden

$$p = p_R \left(\frac{a}{a_R}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad \varrho = \varrho_R \left(\frac{a}{a_R}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}. \tag{7b), (8b)}$$

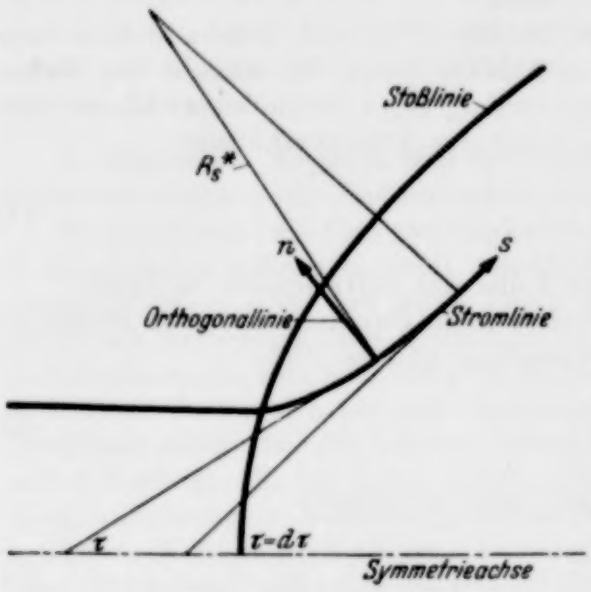

Abb. 2. Strom- und Orthogonallinien.

Für die „kritische" Schallgeschwindigkeit a^* folgt mit $w = a$ aus (11)

$$a^{*2} = \frac{2}{\varkappa+1}\, a_R^2 = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\, w_{max}^2 = \text{konst}\,. \tag{12}$$

Wie ersichtlich, ist für isoenergetische Strömungen die kritische Schallgeschwindigkeit a^* im gesamten Strömungsfeld konstant, auch dann, wenn Stoßverluste mit verschiedener Stoßintensität auftreten.

Des weiteren werden für eine ebene isoenergetische Strömung Beziehungen zwischen den einzelnen Strömungsgrößen und deren Ableitungen aufgestellt. Für die Beschreibung derselben wird ein natürliches Koordinatensystem gewählt, das aus der Bogenlänge s einer Stromlinie und der Normalen n zu dieser Stromlinie gebildet wird; hierbei wird n positiv gerechnet, wenn es zu der in Geschwindigkeitsrichtung verlaufenden Bogenlänge s so gerichtet ist wie die y-Achse zur x-Achse (Abb. 2).

Ersetzt man den Ausdruck $1 - w^2/w_{max}^2$ durch die veränderliche Geschwindigkeitsgröße $\hat{a}$, so nehmen die Gleichungen (7a) und (8a) folgende Form an:

$$p = p_R\, \hat{a}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad \varrho = \varrho_R\, \hat{a}^{\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

In der zweiten Gleichung kann noch ϱ_R durch p_R ersetzt werden; aus (9) und (10) folgt nämlich

$$\varrho_R = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\, \frac{1}{w_{max}^2}\, p_R\,,$$

somit

$$p = p_R\, \hat{a}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad \varrho = \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\, \frac{1}{w_{max}^2}\, p_R\, \hat{a}^{\frac{1}{\varkappa-1}} = C\, p_R\, \hat{a}^{\frac{1}{\varkappa-1}}. \tag{7c), (8c)}$$

Durch partielle Differentiation in Richtung der Stromlinienorthogonale n erhält man aus (7c) und (8c)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \hat{a}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \left(\frac{\partial p_R}{\partial n} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\, \frac{p_R}{\hat{a}}\, \frac{\partial \hat{a}}{\partial n}\right), \tag{13a}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial n} = C \hat{a}^{\frac{1}{\varkappa-1}} \left(\frac{\partial p_R}{\partial n} + \frac{1}{\varkappa-1}\, \frac{p_R}{\hat{a}}\, \frac{\partial \hat{a}}{\partial n}\right) \tag{14a}$$

und in Stromlinienrichtung s (für das Geschwindigkeitsfeld zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verdichtungsstößen) entsprechend

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\, \hat{a}^{\frac{1}{\varkappa-1}}\, p_R\, \frac{\partial \hat{a}}{\partial s}\,, \tag{13b}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} = \frac{C}{\varkappa - 1} \hat{a}^{\frac{2-\varkappa}{\varkappa-1}} p_R \frac{\partial \hat{a}}{\partial s} . \tag{14b}$$

Ganz entsprechend werden auch die höheren Ableitungen gebildet.

Die Gleichungen (13b) bis (14b) unterscheiden sich von den entsprechenden Gleichungen (13a) bis (14a) durch Fehlen der Glieder, die Ableitungen von p_R enthalten; denn nach dem Vorhergesagten tritt in Stromlinienrichtung im Bereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verdichtungsstößen keine Änderung des Ruhedruckes p_R auf.

5. Folgerung aus der Energiegleichung. In einer reibungsfreien, stationären Strömung können Druckunterschiede nur durch Trägheitswirkungen ausgeglichen (im Gleichgewicht gehalten) werden. Liegen z. B. Druckunterschiede quer zur Strömungsrichtung vor, so muß die betrachtete Stromlinie derartig gekrümmt sein, daß der vorhandene Druckunterschied durch Zentrifugalkräfte gerade aufgehoben wird.

Für den Krümmungshalbmesser R_s^* gilt infolge der Gleichgewichtsbedingung zwischen Druck- und Zentrifugalkräften an der betreffenden Stelle

$$\frac{1}{R_s^*} = -\frac{1}{\varrho w^2} \frac{\partial p}{\partial n} .$$

Führt man diesen Ausdruck für $\frac{\partial p}{\partial n}$ in (13a) ein, so ergibt sich

$$-\varrho w^2 \frac{1}{R_s^*} = \hat{a}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \left(\frac{\partial p_R}{\partial n} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_R}{\hat{a}} \frac{\partial \hat{a}}{\partial n} \right) \tag{15}$$

und nach kurzer Rechnung:

$$\frac{1}{R_s^*} = \frac{\partial \ln w}{\partial n} - \frac{1}{\varkappa} \frac{a^2}{w^2} \frac{\partial \ln p_R}{\partial n} . \tag{16}$$

Für kompressible, isentropische Strömungen ist $p_R = \text{konst}$ und daher

$$\frac{1}{R_s^*} = \frac{\partial \ln w}{\partial n} ,$$

so daß also in einem hinter einem Verdichtungsstoß liegenden isoenergetischen Strömungsfeld die Krümmungen $1/R_s^*$ der Stromlinien im Vergleich zu einem isentropischen Strömungsfeld kleiner sind, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitsänderung an der betrachteten Stelle in beiden Fällen dieselbe ist und die Ruhedruckänderung das gleiche Vorzeichen wie die Geschwindigkeitsänderung aufweist.

Definiert man die örtliche *Mach*sche Zahl M wie üblich als $M = w/a$, so folgt endlich

$$\frac{1}{R_s^*} = \frac{\partial \ln w}{\partial n} - \frac{1}{\varkappa M^2} \frac{\partial \ln p_R}{\partial n} . \tag{16a}$$

6. Folgerung aus der Kontinuitätsgleichung. Für eine ebene kompressible Strömung zwischen zwei benachbarten Stromlinien im Abstand dn lautet die Kontinuitätsbedingung

$$d\Psi = \varrho w \, dn = \text{konst.} \tag{17}$$

Logarithmiert und differenziert man (17) nach der Richtung s der Stromlinien, so ergibt sich

$$-\frac{\partial \ln [dn]}{\partial s} = \frac{\partial \ln \varrho w}{\partial s} . \tag{18}$$

Bezeichnet man mit τ denjenigen Winkel, den die Tangente an die Stromlinie an der betrachteten Stelle mit einer festen Richtung — hier die der Anströmung — einschließt, und mit $\partial\tau/\partial n$ die Änderung dieses Winkels beim Fortschreiten in Richtung quer zu den Stromlinien, so ist $\frac{\partial \tau}{\partial n} dn = \frac{\partial [dn]}{\partial s}$ derjenige Winkel, den zwei benachbarte Stromlinien miteinander einschließen, wenn man sich auf der Orthogonale zu den Stromlinien bewegt.

Gleichung (18) kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial \ln \varrho w}{\partial s} = -\frac{\partial \tau}{\partial n} . \tag{19}$$

Ersetzt man $\frac{\partial \tau}{\delta n}$ durch den Krümmungshalbmesser R_n^* der Orthogonalen zur Stromlinie, wobei definitionsgemäß $1/R_n^* = \partial\tau/\partial n$ gilt, so ergibt sich

$$\frac{1}{R_n^*} = -\frac{\partial \ln \varrho w}{\partial s} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial s} - \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial s}\,.$$

Geht man analog wie bei der Bestimmung der Stromlinienkrümmung vor und berücksichtigt dabei, daß der Ruhedruck p_R einer Stromlinie konstant ist, so folgt nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{R_n^*} = -\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial s}\left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) = \frac{\partial \ln w}{\partial s}\left(\frac{w^2}{a^2} - 1\right) = \frac{\partial \ln w}{\partial s}\,(M^2 - 1)\,. \tag{19a}$$

Mit $1/R_s^* = \partial\tau/\partial s$ und $1/R_n^* = \partial\tau/\partial n$ können die Gleichungen (16a) und (19a) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\partial \ln w}{\partial n} - \frac{1}{\varkappa M^2}\frac{\partial \ln p_R}{\partial n}\,, \tag{16b}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial \ln w}{\partial s}\,(M^2 - 1)\,, \tag{19b}$$

wobei M die örtliche *Mach*sche Zahl und p_R den Ruhedruck der betreffenden Stromlinie bezeichnet.

7. Berechnung der Stromlinienkrümmung hinter der Stoßfront. Um Aussagen über den Strömungszustand unmittelbar hinter der Stoßfront zu erhalten, sind die Strömungsgleichungen (16a) und (19a) unter Berücksichtigung der an der Stoßfront herrschenden Verhältnisse in Beziehung zu den Verdichtungsstoßgleichungen zu setzen.

Greift man an einer Stelle der Stoßfront zwei infinitesimal benachbarte Stromlinien heraus und bildet entsprechend Abb. 3 das krummlinige Dreieck $AA'B$, so kann man in erster Näherung die drei Seiten als Kreisbogen auffassen und dafür schreiben

$$\overline{AA'} = ds = R_s\, d\sigma\,, \tag{20}$$

$$\overline{A'B} = dn = R_n\, d\nu\,, \tag{21}$$

$$\overline{AB} = dl = R\, d\varphi\,. \tag{22}$$

Hierbei bezeichnen also R_s und R_n die Krümmungsradien der Strom- und Orthogonallinien unmittelbar hinter dem Stoß und R den Krümmungsradius der Stoßfront.

Ändert sich beim Entlangschreiten auf der Stoßfront von A nach B die Stoßfrontneigung um $d\varphi$, so wird infolge der Stoßintensitätsänderung auch eine Änderung der Ausgangsrichtung der Stromlinie in B hervorgerufen. Diese Richtungsänderung soll mit $d\delta$ bezeichnet werden, wobei $d\delta$ positiv bei Drehung gegen den Uhrzeigersinn, d. h. bei Zunahme der Ablenkung δ gerechnet wird.

Aus der Orthogonalität von Stromlinien und Normalen ergibt sich folgende Winkelbeziehung:

$$d\delta = d\sigma + d\nu\,. \tag{23}$$

Da beim Dreieck ABA' (Abb. 3) die Kreisbögen in erster Näherung durch gerade Strecken ersetzt werden können, so erhält man die Beziehungen

$$ds = \sin(\varphi + \delta)\, dl = R \sin(\varphi + \delta)\, d\varphi\,, \tag{24a}$$

$$dn = \cos(\varphi + \delta)\, dl = R \cos(\varphi + \delta)\, d\varphi\,, \tag{24b}$$

woraus man für die Krümmungshalbmesser R_s und R_n zusammen mit (20), (21), (22) und (23) folgende Ausdrücke erhält:

$$\frac{R_s}{R_n} = \operatorname{tg}(\varphi + \delta)\left(\frac{d\delta}{d\sigma} - 1\right) \tag{25a}$$

bzw.

$$\frac{1}{R_s}\sin(\varphi + \delta) + \frac{1}{R_n}\cos(\varphi + \delta) = \frac{1}{R}\frac{d\delta}{d\varphi}\,. \tag{25}$$

Da $d\delta/d\sigma$ noch frei wählbar ist, kann das Krümmungsradienverhältnis R_s/R_n in (25a) beliebige Werte annehmen; jedoch sind R_s und R_n stets miteinander gekoppelt, da der Ausdruck $1/R\, d\delta/d\varphi$ in (25) sowie die Winkel φ und δ als gegeben vorausgesetzt waren.

Andererseits ist an einer vorgegebenen Stelle der Stoßfront neben der Änderung der Ablenkung auch die Strömungsgeschwindigkeitsänderung dw durch die Stoßbeziehungen festgelegt. Da letztere gleichzeitig über die allgemeinen Strömungsgleichungen (16a) und (19a) mit den Krümmungen der Stromlinien und deren Orthogonalen zusammenhängt, so ist an jeder Stelle der Stoßfront das Krümmungsradienverhältnis R_s/R bzw. R_h/R eindeutig bestimmbar.

Allgemein gilt

$$dw = \frac{\partial w}{\partial s}\,ds + \frac{\partial w}{\partial n}\,dn\,.$$

Wendet man dies auf die Geschwindigkeitsänderung längs der Stoßfront an, so kann man mit (21), (24a) und (24b) schreiben

$$\frac{1}{R}\,\frac{dw}{d\varphi} = \frac{\partial w}{\partial s}\sin(\varphi+\delta) + \frac{\partial w}{\partial n}\cos(\varphi+\delta)\,. \tag{25a}$$

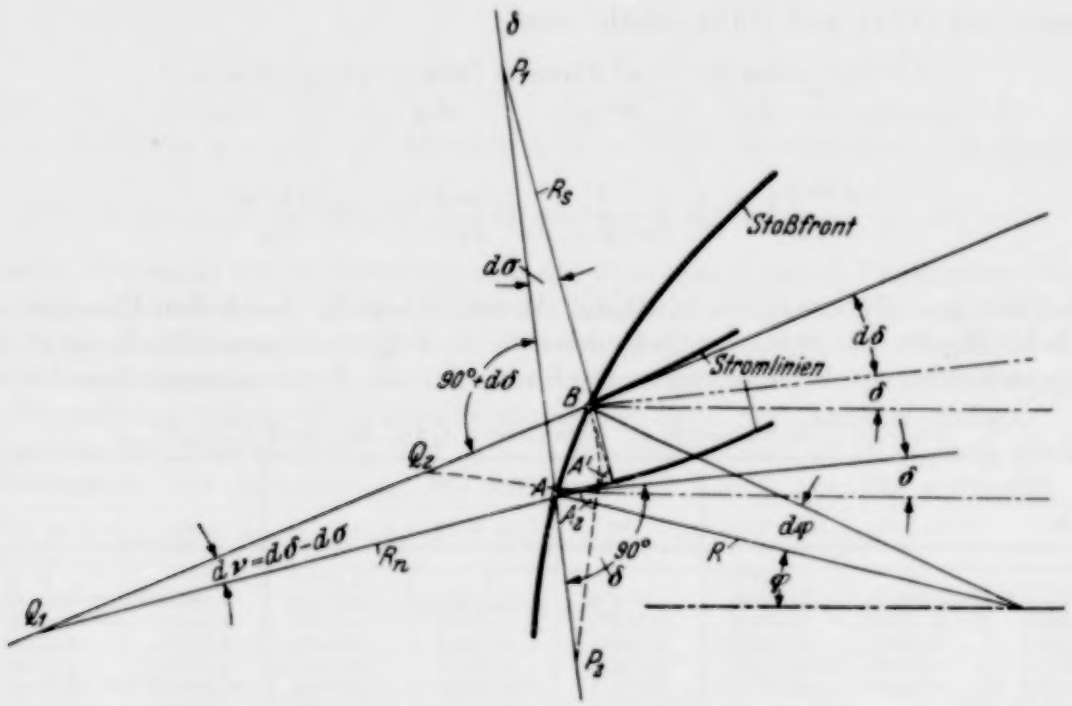

Abb. 3. Strom- und Orthogonallinienkrümmung hinter der Stoßfront.

Andererseits folgt aus (16a) und (19a)

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{w}{R_s} + \frac{w}{\varkappa M^2}\,\frac{\partial \ln p_R}{\partial n}\,, \tag{16c}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{w}{M^2-1}\,\frac{1}{R_n}\,. \tag{19c}$$

Man erhält für die Krümmungen der Stromlinie und Orthogonallinie nach elementarer Rechnung die Ausdrücke:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{-\frac{1}{R}\left[\frac{d\ln w}{d\varphi}(M^2-1)\cos(\varphi+\delta) - \frac{d\delta}{d\varphi}\sin(\varphi+\delta)\right] + \frac{M^2-1}{\varkappa M^2}\,\frac{\partial \ln p_R}{\partial n}\cos^2(\varphi+\delta)}{1-M^2\cos^2(\varphi+\delta)}\,,$$

$$\frac{1}{R_n} = \frac{(M^2-1)\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{d\ln w}{d\varphi}\sin(\varphi+\delta) - \frac{d\delta}{d\varphi}\cos(\varphi+\delta)\right] - \frac{1}{\varkappa M^2}\,\frac{\partial \ln p_R}{\partial n}\cos(\varphi+\delta)\sin(\varphi+\delta)\right\}}{1-M^2\cos^2(\varphi+\delta)}\,.$$

Für die Ruhedruckänderung dp_R gilt entsprechend:

$$dp_R = \frac{\partial p_R}{\partial n}\,dn + \frac{\partial p_R}{\partial s}\,ds\,,$$

und da längs einer Stromlinie, solange keine Diskontinuitäten auftreten, die mechanische Energie konstant bleibt, also $\partial p_R/\partial s = 0$ ist, so folgt

$$dp_R = \frac{\partial p_R}{\partial n}\,dn\,,$$

woraus man

$$\frac{\partial p_R}{\partial n} = \frac{dp_R}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dn} = \frac{dp_R}{d\varphi}\frac{1}{R}\frac{1}{\cos(\varphi+\delta)}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \ln p_R}{\partial n} = \frac{d\ln p_R}{d\varphi}\frac{1}{R}\frac{1}{\cos(\varphi+\delta)}$$

erhält.

Gleichung (7a) logarithmiert und nach φ differentiiert (— wie später gezeigt wird, sind für eine im ganzen Anströmgebiet konstante *Mach*zahl M_1 die Größen p, w, und p_R an der Stoßfront Funktionen von φ allein —) ergibt

$$\frac{d\ln p_R}{d\varphi} = \frac{d\ln p}{d\varphi} + \frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{1}{1-\frac{w^2}{w_{max}^2}}\frac{w^2}{w_{max}^2}\frac{d\ln w}{d\varphi}.$$

Zusammen mit (13a) und (13b) erhält man

$$\frac{d\ln p_R}{d\varphi} = \frac{d\ln p}{d\varphi} + \varkappa\frac{w^2}{a^2}\frac{d\ln w}{d\varphi} = \frac{d\ln p}{d\varphi} + \varkappa M^2\frac{d\ln w}{d\varphi}, \tag{26a}$$

woraus schließlich

$$\frac{\partial \ln p_R}{\partial n} = \frac{1}{R}\frac{1}{\cos(\varphi+\delta)}\left(\frac{d\ln p}{d\varphi} + \varkappa M^2\frac{d\ln w}{d\varphi}\right) \tag{27}$$

folgt.

Werden noch $\sin(\varphi+\delta)$, $\cos(\varphi+\delta)$, $d\delta/d\varphi$, M und $d\ln p/d\varphi$ durch den Parameter φ und die *Mach*sche Zahl M_1 der Anströmung ausgedrückt, so folgt mit den Gleichungen (58) bis (64) des Anhangabschnittes nach elementarer Rechnung für die Krümmungsradien der Strom- und

Tabelle 1. *Zahlenwerte der Funktionen $f_1(\varphi, M_1)$ und $f_2(\varphi, M_1)$.*

φ [Neugrad]	$M_1 = 1{,}05$			$M_1 = 1{,}10$			$M_1 = 1{,}5$		
	M^2	$f_1(\varphi, 1{,}05)$	$f_2(\varphi, 1{,}05)$	M^2	$f_1(\varphi, 1{,}10)$	$f_2(\varphi, 1{,}10)$	M^2	$f_1(\varphi, 1{,}5)$	$f_2(\varphi, 1{,}5)$
0		0	0,08379		0	0,16867		0	0,85874
2,5	0,91147	0,10661	0,07495	0,83433	0,12003	0,15835	0,49517	0,24103	0,83054
5,0	0,92050	0,19419	0,05017	0,84322	0,22675	0,12876	0,50476	0,46025	0,74967
7,5	0,93562	0,23911	0,015156	0,85808	0,30635	0,08400	0,52079	0,63899	0,62654
10,0	0,95693	0,17036	—0,018117	0,87903	0,34365	0,031146	0,54330	0,76408	0,47612
15,0	1,01884	—0,54460	+0,071686	0,93974	0,20601	—0,05051	0,60809	0,83147	0,16017
20				1,02704	—0,56272	+0,08591	0,70002	0,66691	—0,07946
25				1,14370	—5,33224	+2,02099	0,82047	0,31356	—0,16418
30							0,97146	—0,15789	—0,04402
35							1,15599	—0,89021	+0,34569
40							1,37863	—1,90992	+1,17674
45							1,64700	—3,82686	+3,08058
50							1,97247	—10,7702	10,3503
	$\varphi_0 = 19{,}725^g$	$-\infty$	∞	$\varphi_0 = 27{,}356^g$	$-\infty$	$+\infty$	$\varphi_0 = 53{,}544^g$	$-\infty$	$+\infty$

φ [Neugrad]	$M_1 = 2{,}0$			$M_1 = 5{,}0$			$M_1 = \infty$		
	M^2	$f_1(\varphi, 2{,}0)$	$f_2(\varphi, 2{,}0)$	M^2	$f_1(\varphi, 5{,}0)$	$f_2(\varphi, 5{,}0)$	M^2	$f_1(\varphi, \infty)$	$f(\varphi, \infty)$
0	0,33410	0	1,65746	0,17360	0	3,95876		0	4,93827
2,5	0,33805	0,42329	1,59085					1,58701	4,39471
5,0	0,34989	0,78978	1,40484	0,20020	1,96634	2,79455		2,48795	3,14649
7,5	0,36968	1,05785	1,13560					2,62294	1,86060
10,0	0,39749	1,20894	0,82906	0,28100	2,13171	1,01765		2,29994	0,89846
15	0,47757	1,18717	0,26404	0,41911	1,42079	0,0750		1,31987	—0,016488
20	0,59129	0,87333	—0,08921	0,61994	0,68167	—0,173904		0,52132	—0,158100
25	0,74029	0,43101	—0,19328	0,89162	0,11545	—0,074433		—0,01841	+0,010224
30	0,92673	—0,04527	—0,08142	1,24560	—0,29270	+0,185518		—0,37646	0,299647
35	1,15340	—0,52429	0,21160	1,69754	—0,58911	+0,52634		—0,61898	0,64300
40	1,42389	—1,01706	0,68043	2,26846	—0,81203	0,92022		—0,78805	1,01980
45	1,74300	—1,56696	1,36821	2,98646	—0,98873	1,36448		—0,90922	1,42863
50	2,11764	—2,28774	2,43138	3,88904	—1,13915	1,87208		—0,99818	1,87778
55	2,55881	—3,44345	4,30670	5,0285	—1,27996	2,47157		—1,06475	2,38298
60	3,08631	—6,10570	8,82212	6,4602	—1,42852	3,21486		—1,11532	2,96822
65	3,74045	—24,0655	39,8391	8,2760	—1,61002	4,20260		—1,15408	3,67446
70				10,5743	—1,87223	5,65091		—1,18390	4,56354
75				13,4808	—2,33719	8,1353		—1,20674	5,75061
80				17,1671	—3,39692	13,5854		—1,22397	7,46347
85				22,0681	—9,91088	45,4796		—1,23654	10,2323
90								—1,24511	15,6462
95								—1,25009	31,6471
100									∞
	$\varphi_0 = 66{,}667^g$	$-\infty$	$+\infty$	$\varphi_0 = 87{,}181^g$	$-\infty$	$+\infty$	$\varphi_0 = 100^g$		

Bei der Ermittlung der $f_1(\varphi, M_1)$ und $f_2(\varphi, M_1)$-Werte wurde mit $\varkappa = 1{,}405$ gerechnet.

Orthogonallinien

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R} f_1(\varphi, M_1)\,, \tag{28a}$$

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R} f_2(\varphi, M_1) \tag{29a}$$

mit

$$f_1 = \frac{M_1^2 \cos^2\varphi \operatorname{tg}\varphi \left[\varkappa(2\varkappa-1)\, M_1^6 \cos^6\varphi - (2\varkappa-1)\frac{\varkappa+1}{2} M_1^6 \cos^4\varphi + \frac{-2\varkappa^2+13\varkappa-3}{2} M_1^4 \cos^4\varphi - \right.}{(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos\varphi \sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\left. - (4\varkappa-5)\, M_1^2\cos^2\varphi - \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+5)}{4} M_1^4\cos^2\varphi + \frac{\varkappa^2-1}{4} M_1^2 + \frac{\varkappa-5}{2}\right]}{(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}}$$

und

$$f_2 = -\frac{\left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^4\cos^2\varphi - \varkappa\, M_1^4\cos^4\varphi - \frac{3-\varkappa}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)}{(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}} \cdot F$$

$$F = (2\varkappa+1)\, M_1^4\cos^4\varphi - 3\frac{\varkappa+1}{2} M_1^4\cos^2\varphi + 2\, M_1^2\cos^2\varphi - \frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 - 1\,.$$

Bei konstanter *Mach*zahl der Anströmung sind die Faktoren f_1 und f_2 Funktionen von φ allein.

Ist der Krümmungshalbmesser R der Stoßfront bekannt, so lassen sich mit Hilfe der Funktionen f_1 und f_2 die Krümmungen $\partial\tau/\partial s = 1/R_s$ bzw. $\partial\tau/\partial n = 1/R_n$ der Stromlinien und der Orthogonallinien leicht berechnen. In diesen Gleichungen ist die Änderung der Energieverluste quer zu den Stromlinien infolge Neigungsänderung der Stoßfront berücksichtigt.

Die Zahlenwerte der Funktionen f_1 und f_2 in φ-Intervallen von 5^g (Neugrad) sind für eine Reihe von *Mach*zahlen der Anströmung M_1 in Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

Tabelle 2. *Zahlenwerte der Funktionen* $f_1(\varphi, M_1)$ *und* $f_2(\varphi, M_1)$.

Machzahl der Anströmung M_1	Symmetrieachse	Ort der Größtablenkung (δ_{max})			Schallgeschwindigkeitsstromlinie ($M = 1$) **)	
	$f_2(0, M_1)$ *)	$f_1(\varphi_{\delta max}, M_1)$	$f_2(\varphi_{\delta max}, M_1)$	δ_{max} [Neugrad]	$f_1(\varphi_{M=1}, M_1)$	$\delta_{M=1}$ [Neugrad]
1,0	0	0	0	0	0	0
1,05	0,083793	0,143126	—0,026837	0,6187	—0,175494	0,5708
1,10	0,168671	0,189779	—0,051612	1,6797	—0,223537	1,5588
1,15	0,257376	0,216758	—0,073977	2,9604	—0,268405	2,7626
1,2	0,34066	0,232340	—0,093711	4,3713	—0,290151	4,1016
1,3	0,51407	0,242656	—0,125002	7,3823	—0,309704	7,0002
1,4	0,68724	0,236229	—0,145863	10,4447	—0,310007	9,9997
1,5	0,85874	0,221160	—0,157751	13,4180	—0,299652	12,9534
1,6	1,02740	0,202227	—0,162558	16,2283	—0,283700	15,7754
1,7	1,19226	0,182284	—0,162168	18,8405	—0,265252	18,4185
1,8	1,35258	0,163042	—0,158293	21,2431	—0,246061	20,8617
1,9	1,50778	0,144985	—0,151938	23,4384	—0,227523	23,0997
2,0	1,65746	0,129066	—0,144615	25,4361	—0,209902	25,1395
2,25	2,00602	0,096517	—0,123993	29,6621	—0,171640	29,4547
2,5	2,31724	0,073482	—0,104744	32,9820	—0,140726	32,8397
2,75	2,59243	0,057173	—0,088374	35,6085	—0,118069	35,5073
3,0	2,83437	0,045467	—0,074946	37,7082	—0,099730	37,6359
3,5	3,23218	0,030473	—0,055192	40,7947	—0,073602	40,7556
4,0	3,53774	0,021758	—0,042025	42,9011	—0,056422	42,8782
5,0	3,95876	0,012681	—0,026515	45,4893	—0,036106	45,4800
7,5	4,45902	0,005069	—0,011516	48,1726	—0,016012	48,1708
10,0	4,65882	0,002737	—0,006410	49,1439	—0,009003	49,1433
20,0	4,86585	0,000066	—0,000159	50,0978	—0,002249	50,0973
100,0						
∞	4,93827	0	0	50,4189	0	50,4189

*) Auf der Symmetrieachse ist $f_1(0, M_1) = 0$.

**) Auf der Schallgeschwindigkeitsstromlinie ist im ganzen M_1-Bereich $f_2(\varphi_{M=1}, M_1) = 0$.

Die zu $f_1(\varphi_{\delta max}, M_1)$, $f_2(\varphi_{\delta max}, M_1)$ und $f_1(\varphi_{M=1}, M_1)$ gehörigen $\varphi_{\delta max}$- bzw. $\varphi_{M=1}$-Werte sind in der Tabelle 3 enthalten.

8. Grenzwerte. a) Symmetrieachse. Hier ist $\varphi = 0$, also $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = 0$. Die Ausdrücke für $1/R_s$ und $1/R_n$ vereinfachen sich zu

$$\left(\frac{1}{R_s}\right)_S = \left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\right)_S = 0\,,$$

$$\left(\frac{1}{R_s}\right)_S = \left(\frac{\partial\tau}{\partial n}\right)_S = +\frac{1}{R}\,\frac{M_1^2-1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}\,. \tag{29b}$$

Nun ist

$$\frac{M_1^2-1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1} - \frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}{\frac{\varkappa-1}{2}M^2+1} = \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{M_1^2}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1} - 1\,.$$

Andererseits gilt für die Strömungsgeschwindigkeit w_s auf der Symmetrieachse $\cos\varphi = 1$ zufolge der Gleichungen (56) und (57) des Anhangs

$$\frac{w_1}{w_s} = \frac{w_1}{w_1 - r} = \frac{w_1}{w_1 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(w_1 - \frac{a_1^2}{w_1}\right)} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2}}{\frac{\varkappa-1}{2}+\frac{1}{M_1^2}} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}\,.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{1}{R_n}\right)_S = \frac{1}{R}\,\frac{M_1^2-1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1} = \frac{1}{R}\left(\frac{w_1}{w_s}-1\right)$$

sowie mit der *Prandtl*schen Beziehung $w_1\,w_s = a^{*2}$ für den geraden Stoß

$$\left(\frac{1}{R_n}\right)_S = \left(\frac{\partial\tau}{\partial n}\right)_S = +\frac{1}{R}\,(M_1^{*2}-1)\,. \tag{29c}$$

b) Äußere Grenzlage. Die äußere Grenzlage wird an der Stelle erreicht, wo die Neigung der Stoßfront mit dem *Mach*schen Winkel $\alpha_0 = \gamma_0$ der Anströmung zusammenfällt. Hierbei gilt[1]

$$\sin\gamma_0 = \cos\varphi_0 = \frac{1}{M_1}\,, \qquad \sin\varphi_0 = \sqrt{1-\cos^2\varphi_0} = \frac{\sqrt{M_1^2-1}}{M_1}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{M_1^2-1}\,.$$

Man erhält für die Krümmungen der Strom- und Orthogonallinien, wenn man in der Umgebung von φ_0 $\cos\varphi_0 = (1+\varepsilon)/M_1$ mit $\varepsilon \to 0$ setzt, folgende Ausdrücke:

$$\left(\frac{1}{R_s}\right)_a = \left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\right)_a \approx -\frac{4}{\varkappa+1}\,\frac{\sin^3\varphi_0}{R}\,\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

$$\left(\frac{1}{R_n}\right)_a = \left(\frac{\partial\tau}{\partial n}\right)_a \approx +\frac{4}{\varkappa+1}\,\frac{\sin^3\varphi_0}{R}\operatorname{tg}\varphi_0\,\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Demnach würden bei einem endlichen Krümmungsradius R der Stoßfront in der Umgebung von $\varphi = \varphi_0$ die Krümmungen der Stromlinien sowie der Orthogonallinien unendlich große Werte annehmen. Da nun aber der Stoß dort unendlich schwach wird, d. h. die ankommenden Stromlinien beim Durchgang durch die Stoßfront keinerlei Richtungsänderungen erfahren dürfen, so muß die Stroßfront in der Umgebung von φ_0 derartig beschaffen sein, daß ihr Krümmungsradius R dort nach unendlich mindestens wie $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 1/\varepsilon^2$ strebt.

Das Verhältnis der Krümmungshalbmesser der Stromlinien $R_s = \dfrac{1}{\partial\tau/\partial s}$ und der Orthogonallinien $R_n = \dfrac{1}{\partial\tau/\partial n}$ an der Stoßfront in der Umgebung von φ_0 ist

$$\frac{R_s}{R_n} = -\sqrt{M_1^2-1} = -\operatorname{tg}\varphi_0\,.$$

c) Expansion ins Vakuum. Bei der Expansion ins Vakuum ist die *Mach*sche Zahl $M_1 = \infty$. Dividiert man Zähler und Nenner der Gleichungen (28a) und (29a) durch die höchste

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 211.

auftretende Potenz von M_1, und unterdrückt die Ausdrücke mit $\frac{1}{M_1^2}$, $\frac{1}{M_1^4}$, so erhält man

$$\frac{1}{R_{s_v}} = \frac{\partial \tau_v}{\partial s} = +\frac{1}{R}(2\varkappa - 1)\sin\varphi \frac{\varkappa\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}}{\left[\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2 - \varkappa\cos^2\varphi\right]^{3/2}},$$

$$\frac{1}{R_{n_v}} = \frac{\partial \tau_v}{\partial n} = +\frac{1}{R}\frac{(2\varkappa+1)\cos^2\varphi - \frac{3}{2}(\varkappa+1)}{\cos\varphi} \frac{\varkappa\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}}{\left[\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2 - \varkappa\cos^2\varphi\right]^{3/2}}.$$

Das Verhältnis der Krümmungshalbmesser ist hier an jeder Stelle der Stoßfront

$$\frac{R_{s_v}}{R_{n_v}} = \frac{2}{2\varkappa - 1}\frac{(2\varkappa+1)\cos^2\varphi - \frac{3}{2}(\varkappa+1)}{\sin 2\varphi}.$$

Ausgezeichnete Stellen sind hier ferner:

d) Diejenigen Orte an der Stoßfront, wo der Ablenkungswinkel δ sein Maximum erreicht. Hierbei gilt

$$\left(\frac{1}{R_s}\right)_{\delta max} = -\frac{1}{R}$$

$$\left[\frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi\, M_1^2\cos^2\varphi\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi - \varkappa M_1^4\cos^4\varphi - \frac{3-\varkappa}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)}{(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}}\right]_{\varphi_{\delta max}},$$

$$\left(\frac{1}{R_n}\right)_{\delta max} = -\left(\frac{1}{R_s}\,\mathrm{tg}\,(\varphi+\delta)\right)_{\delta max} =$$

$$= +\frac{1}{R}\left[\frac{(\varkappa+1)\,\mathrm{tg}^2\varphi\, M_1^4\cos^4\varphi\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi - \varkappa M_1^4\cos^4\varphi - \frac{3-\varkappa}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)}{(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{3/2}}\right]_{\varphi_{\delta max}}.$$

Die $\varphi_{\delta max}$-Werte für die bei vorgegebener *Mach*zahl M_1 der Anströmung der Ablenkungswinkel δ gerade sein Maximum erreicht, erhält man aus Gleichung (61) des Abschnittes 11 durch Nullsetzen des Zählers, d. h.

$$\cos^2\varphi_{\delta max} = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varkappa+1}{4} - \frac{1}{M_1^2} + \sqrt{(\varkappa+1)\left(\frac{1}{M_1^4} + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{1}{M_1^2} + \frac{\varkappa+1}{16}\right)}\right]. \tag{30}$$

Die für verschiedene Machzahlen der Anströmung M_1 errechneten Werte $\varphi_{\delta max}$ sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

e) Diejenigen Orte an der Stoßfront, wo die Strömungsgeschwindigkeit w gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit a ist. Bei vorgegebener Machzahl der Anströmung M_1 entspricht der Polarwinkel $\varphi_{M=1} = 90° - \gamma_{M=1}$ derjenigen Stoßfrontneigung $\gamma_{M=1}$, bei der hinter der Stoßfront im Strömungsfeld gerade Schallgeschwindigkeit herrscht. Man erhält die $\varphi_{M=1}$-Werte aus Gleichung (63) des Abschnittes 11, wenn man den Zähler der rechten Seite gleich Null setzt, d. h.

$$\cos^2\varphi_{M=1} =$$

$$= \frac{1}{4\varkappa}\left[(\varkappa+1) - (3-\varkappa)\frac{1}{M_1^2} \pm \sqrt{\frac{1}{M_1^4}(\varkappa^2+10\varkappa+9) + \frac{1}{M_1^2}(2\varkappa^2 - 4\varkappa - 6) + (\varkappa+1)^2}\right]. \tag{31}$$

Die für verschiedene Machzahlen der Anströmung M_1 errechneten Werte $\varphi_{M=1}$ und $\gamma_{M=1}$ sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Hierbei ist für das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_v der Wert $\varkappa = 1{,}405$ der Rechnung zugrunde gelegt.

Tabelle 3. *Stoßfrontneigung für größte Ablenkung, Schallgeschwindigkeit hinter dem Stoß und größte Stromdichte.*

M_1	$\cos\varphi_s = \frac{1}{M_1}$	$\cos\varphi_{\delta max}$	$\varphi_{\delta max}$ [Neugrad]	$\cos\varphi_{M=1}$	$\varphi_{M=1}$ [Neugrad]	$\cos\varphi^*$	φ^* [Neugrad]
1,0	1,00	1.0	0	1,0	0	1,0	0
1,05	0,95238	0,98462	11,1811	0,97698	13,6853		
1,1	0,90909	0,97153	15,2273	0,95757	18,6118		
1,15	0,86957	0,96039	17,9775	0,94127	21,9273		
1,2	0,83333	0,95091	20,0298	0,92766	24,3631	0,92269	25,1977
1,3	0,76923	0,93599	22,9008	0,90711	27,6562		
1,4	0,71429	0,92525	24,7707	0,83350	29,6484	0,87376	32,3352
1,5	0,66667	0,91759	26,0264	0,88494	30,8394		
1,6	0,62500	0,91220	26,8759	0,88000	31,5092	0,84095	36,3989
1,7	0,58824	0,90850	27,4459	0,87757	31,8334		
1,8	0,55556	0,90605	27,8161	0,87686	31,9263	0,81678	39,1516
1,9	0,52632	0,90448	28,0522	0,87727	31,8725		
2,0	0,50000	0,90364	28,1770	0,87842	31,7199	0,79760	41,2209
2,25	0,44444	0,93229	28,2294	0,88283	31,1275		
2,5	0,40000	0,90434	28,0724	0,88790	30,4335	0,76060	44,9815
2,75	0,36364	0,90593	27,8351	0,89244	29,7990		
3,0	0,33333	0,90764	27,5765	0,89651	29,2184	0,73092	47,8183
3,5	0,28571	0,91083	27,0892	0,90297	28,2765		
4,0	0,25000	0,91343	26,6852	0,90762	27,5797	0,68141	52,2740
5,0	0,20000	0,91706	26,1115	0,91393	26,6695	0,64003	55,7840
7,5	0,13333	0,92128	25,4289	0,91981	25,6689		
10,0	0,10000	0,92291	25,1603	0,92211	25,2934	0,50358	66,4033
20,0	0,05000	0,92457	24,8856	0,92436	24,9184	0,37684	75,4022
100,0	0,01000	0,92511	24,7944	0,92510	24,7957		
∞	0	0,92513	24,7906	0,92513	24,7906		

Für die Krümmungshalbmesser der Strom- und Orthogonallinien folgt aus (28a) und (29a) mit $M = 1$

$$\left(\frac{1}{R_s}\right)_{M=1} = +\frac{1}{R}\left[\frac{\varkappa M_1^4\cos^4\varphi - \frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi + 2M_1^2\cos^2\varphi - \frac{\varkappa+1}{2}M_1^2 - 1}{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2+\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{1/2}}\right]_{\varphi M=1}$$

$$\left(\frac{1}{R_n}\right)_{M=1} = 0\,.$$

f) Stromdichtenverlauf hinter der Stoßfront. Für das auf die Dichte ϱ_1 und die Schallgeschwindigkeit a_1 des Ausgangsströmungszustandes bezogene Produkt ϱw hinter der Stoßfront kann mit den Gleichungen (46) und (51) des Abschnittes 11 geschrieben werden

$$\frac{\varrho w}{\varrho_1 a_1} = \frac{M_1\cos\varphi}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1}\sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2+\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2}\,. \tag{32}$$

Die Stelle hinter der Stoßfront, wo für einen gegebenen Gaszustand p_1, ϱ_1, M_1 das Produkt ϱw sein Maximum erreicht, erhält man in üblicher Weise durch Nullsetzen des nach dem Parameter φ differenzierten Ausdruckes (32), d. h. es gilt hier

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varrho w}{\varrho_1 a_1}\right) = \frac{\varrho}{\varrho_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{w}{a_1}\right) + \frac{w}{a_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right) =$$

$$= \frac{M_1\sin\varphi\left\{\varkappa\frac{\varkappa-1}{2}M_1^6\cos^6\varphi + 3\varkappa M_1^4\cos^4\varphi - M_1^2\left[2\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2M_1^2+\frac{3}{2}(\varkappa-1)\right]\cos^2\varphi - 1\right\}}{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2+\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]^{1/2}} = 0\,.$$

Die Auflösung des im Zähler in den geschweiften Klammern stehenden Ausdruckes nach $\cos^2\varphi$ ergibt φ^*-Werte, die im gesamten M_1-Bereich zwischen $\varphi_{M=1}$ und φ_0 liegen. Hieraus folgt, daß in einem isoenergetischen Strömungsfeld die Stelle hinter der Stoßfront, wo das Produkt ϱw sein Maximum erreicht, nicht identisch mit dem Ort ist, wo an der Stoßfront gerade Schallgeschwindigkeit herrscht. An dieser Stelle erreicht lediglich der ϱw-Wert, die Stromdichte dieser Stromlinie an der Stoßfront das Maximum. Für einige Machzahlen der Anströmung M_1 sind die berechneten φ^*-Werte in Tabelle 3 angegeben.

9. Erster und zweiter Differentialquotient der Geschwindigkeit in Stromlinienrichtung. Aus (19a) und (29a) erhält man für den Geschwindigkeitsgradienten in Stromlinienrichtung $\partial w/\partial s$ bzw. für $\partial \ln w/\partial s$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{1}{R}\,\frac{w}{M^2-1}\,f_2(\varphi, M_1)\,, \\ \frac{\partial \ln w}{\partial s} &= \frac{1}{R}\,\frac{1}{M^2-1}\,f_2(\varphi, M_1)\,. \end{aligned}\right| \tag{33}$$

Hierbei ist (vgl. Gl. [63] des Abschnittes 11)

$$\frac{1}{M^2-1} = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)\left(\varkappa M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa-1}{2}\right)}{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi-\varkappa M_1^4\cos^4\varphi-\frac{3-\varkappa}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1}\,.$$

Bezieht man die Strömungsgeschwindigkeit w auf die Schallgeschwindigkeit der Anströmung a_1, so erhält man mit Gleichung (51) des Abschnittes 11 für den Geschwindigkeitsgradienten in Stromlinienrichtung folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{a_1}{R}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^2 \tag{34}$$
$$\frac{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)\left(\varkappa M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa-1}{2}\right)\left[(2\varkappa+1)M_1^4\cos^4\varphi-3\,\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi+2M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2-1\right]}{M_1\cos\varphi\,(M_1^2\cos^2\varphi-1)\left[\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2+\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2\right]}\,.$$

Für die Symmetrieachse vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{\partial w_s}{\partial s} = -\frac{a_1}{R_s}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)\frac{\varkappa M_1^2-\frac{\varkappa-1}{2}}{M_1}\,. \tag{35}$$

Die Geschwindigkeit hinter der Stoßfront w ist durch die Gleichung (51) des Abschnittes 11 festgelegt. Für eine konstante Machzahl der Anströmung M_1 ist sie lediglich eine Funktion des Neigungswinkels der Stoßfront an dieser Stelle oder, anders geschrieben, des Komplementwinkels zur Stoßfrontneigung φ ($\varphi = 90° - \gamma$). Mithin ist auch der zweite Differentialquotient $d^2w/d\varphi^2$ an dieser Stelle der Stoßfront bekannt. Andererseits gilt nach den allgemeinen Regeln der partiellen Differentiation

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial n}\,\frac{\partial s}{\partial \varphi}\,\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial s}\,\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial n}\,\frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2}\,. \tag{36}$$

Aus den in Abschnitt 11 angegebenen Zusammenhängen erhält man [vgl. (58) und (59)]

$$\frac{d}{d\varphi}\sin(\varphi+\delta) = \sin(\varphi+\delta)\left(\operatorname{ctg}\varphi - \frac{d\ln w}{d\varphi}\right),$$
$$\frac{d}{d\varphi}\cos(\varphi+\delta) = -\cos(\varphi+\delta)\left(\Delta\operatorname{tg}\varphi + \frac{d\ln w}{d\varphi}\right)$$

mit

$$\Delta = \frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi-1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1}\,,$$

so daß mit (24a) und (24b)

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = \sin(\varphi+\delta)\left[R\left(\operatorname{ctg}\varphi - \frac{d\ln w}{d\varphi}\right) + \frac{dR}{d\varphi}\right], \tag{37a}$$
$$\frac{d^2n}{d\varphi^2} = -\cos(\varphi+\delta)\left[R\left(\Delta\operatorname{tg}\varphi + \frac{d\ln w}{d\varphi}\right) - \frac{dR}{d\varphi}\right] \tag{38a}$$

gilt

Für den Krümmungshalbmesser ϱ_{kr} einer analytischen Kurve im cartesischen Koordinatensystem kann geschrieben werden (Hütte I, S. 133)

$$\varrho_{kr} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\,.$$

Die Änderung von ϱ_{kr} auf der Strecke dx lautet

$$\frac{d\varrho_{kr}}{dx} = \frac{3\,y'\,y''^2\,(1+y'^2)^{1/2} - (1+y'^2)^{3/2}\,y'''}{y''^2};$$

gleichzeitig ist mit $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} y'$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{y''}{1+y'^2},$$

woraus mit $\varrho_{kr} = -R$

$$\frac{dR}{d\varphi} = -R\,\frac{3\,y''^2 y' - (1+y'^2)\,y'''}{y''^2}.$$

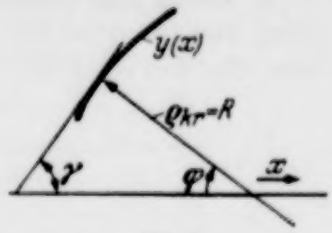

Abb. 4.
Krümmung der Stoßfront.

Aus Schlierenaufnahmen von Verdichtungsstößen geht hervor, daß der beim abgelösten Verdichtungsstoß auftretende Stoßfrontverlauf im wesentlichen einen hyperbelähnlichen Charakter aufweist. Für eine Hyperbel $\left(\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1\right)$ erhält man aber nach kurzer Rechnung für den Krümmungshalbmesser R_H an einer Stelle x, y den Ausdruck

$$R_H = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{a^4 b^4} = \frac{b^2}{a}\left[\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)+1\right]^{3/2}, \tag{39}$$

oder mit $R_0 = b^2/a$ als Scheitelkrümmungshalbmesser

$$R_H = R_0\left[\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)+1\right]^{3/2}. \tag{39a}$$

Für die Änderung des Krümmungshalbmessers R_H bei einer Winkeldrehung $d\varphi$ gilt somit

$$\frac{dR_H}{d\varphi} = 3\,R_H\,xy\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \tag{40}$$

$$\frac{dR_H}{d\varphi} = 3\,R_0\left[\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)+1\right]^{3/2}\frac{y}{b}\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+1}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right). \tag{40a}$$

Hierbei sind x, y die laufenden Koordinaten eines Hyperbelpunktes, wobei der Koordinatenanfangspunkt im Kreuzungspunkt der Asymptoten liegt, und a, b die in x- bzw. y-Richtung fallenden Halbachsen der Hyperbel.

Da die Stoßfrontneigung γ in großer Entfernung vom Körper mit dem *Mach*schen Winkel der Anströmung zusammenfällt, kann man bei einer hyperbelähnlichen Stoßfrontform das Achsenverhältnis b/a durch die Machzahl der Anströmung ausdrücken. Es gilt[1]

$$\sin\gamma_0 = \frac{1}{M_1}, \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{\sin\gamma_0}{\cos\gamma_0} = \frac{1}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Mit $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$ kann für die Krümmungsänderung $\frac{dR_H}{d\varphi}$ einer Hyperbel auch

$$\frac{dR_H}{d\varphi} = 3R_H \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right) = 3R_H \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{1}{M_1^2-1}+1\right)$$

oder

$$\frac{dR_H}{d\varphi} = 3R_H\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin^2\varphi_0}\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right) = 3R_H\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin^2\varphi_0}\,\Delta_H^2 \tag{40b}$$

mit

$$\Delta_H^2 = \frac{y^2}{b^2}+1 = \frac{x^2}{a^2}$$

geschrieben werden (vgl. Tabelle 4).

Die Gleichung (40b) würde exakt gelten, wenn die Stoßfront eine Hyperbel mit dem festen durch die Machzahl der Anströmung festgelegten Achsenverhältnis wäre. In praktischen Fällen ist jedoch mit Abweichungen zu rechnen, da die Stoßfront sich der durch die Körperform bedingten Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld anpassen muß. Die Schwierigkeit liegt dabei in der genauen Erfassung des Klammerausdruckes (y^2/b^2+1), da ja dieser bei einer durch die Körperumströmung bedingten Änderung der Stoßfrontform nicht mehr dem für die Hyperbel ermittelten Zahlenwert gleich sein kann.

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 211.

Tabelle 4. Δ_H^2 *der Schallgeschwindigkeitsstromlinie als Funktion von* M_1.

M_1	1,05	1,10	1,15	1,20	1,3	1,5	2,0
$(\mathrm{tg}^2\varphi)_{M=1}$	0,04767	0,09063	0,12867	0,16198	0,21521	0,27698	0,29600
$(y^2/b^2)_{M=1}$	0,86941	0,75924	0,63126	0,58265	0,45327	0,23466	0,10947
$(\Delta_H^2)_{M=1}$	1,8694	1,7592	1,6313	1,5827	1,4533	1,2847	1,1085
M_1	2,5	3,0	4,0	5,0	7,5	10,0	
$(\mathrm{tg}^2\varphi)_{M=1}$	0,26839	0,24425	0,21388	0,19832	0,18203	0,17606	
$(y^2/b^2)_{M=1}$	0,05388	0,03149	0,01446	0,00833	0,00331	0,00178	
$(\Delta_H^2)_{M=1}$	1,0539	1,0315	1,0145	1,0083	1,0033	1,0018	

Die Größe des hierbei möglichen Fehlers kann abgeschätzt werden. Wie Tabelle 4 zeigt, nähert sich der Ausdruck: $\Delta_H^2 = y^2/b^2 + 1$ nur im „Unterschallbereich" der Stoßfront bei sehr kleiner Machzahl M_1 der Anströmung im Schallgeschwindigkeitspunkt dem Zahlenwert 2,0. Sowohl mit zunehmender Machzahl M_1 wie auch mit abnehmendem φ fällt er aber schnell auf den Wert 1,0 ab. Ein kleiner Fehler in der Abschätzung von y/b wirkt sich daher auf den Wert Δ_H nicht sehr stark aus. Würde man z. B. bei der Abschätzung des $(y/b)_{M=1}$-Wertes im Schallgeschwindigkeitspunkt bei der Anströmmachzahl $M_1 = 2{,}0$ einen Fehler von 10% machen, so würde der Wert Δ_H^2 nur um 2,07 bis 1,90% gefälscht werden. Aus diesen Erwägungen heraus wird man also für den „Unterschallbereich" der Stoßfront bei der Ermittlung der $d^2s/d\varphi^2$- und $d^2n/d\varphi^2$-Werte die Gleichung (40b) verwenden dürfen.

Mit (40b) nehmen die Gleichungen (37a) und (38a) folgende Form an:

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = R\sin(\varphi+\delta)\left(\mathrm{ctg}\,\varphi - \frac{d\ln w}{d\varphi} + \frac{3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin^2\varphi_0}\,\Delta_H^2\right), \tag{37b}$$

$$\frac{d^2n}{d\varphi^2} = -R\cos(\varphi+\delta)\left(\Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{d\ln w}{d\varphi} - \frac{3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin^2\varphi_0}\,\Delta_H^2\right) \tag{38b}$$

mit den Abkürzungen

$$\Delta = \frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi - 1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi + 1}, \qquad \Delta_H^2 = \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2}\,(2 > \Delta^2 > 1).$$

Durch Einsetzen von (37b) und (38b) in (36) unter Berücksichtigung von (33) erhält man nach umfangreicher Zwischenrechnung

$$\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{1}{R^2}\,L(\varphi, M_1). \tag{41}$$

Auf die Wiedergabe der umfangreichen Beziehung $L(\varphi, M_1)$ muß an dieser Stelle verzichtet werden[1].

Für die Geschwindigkeit w_s auf der Symmetrieachse nimmt (41) folgende einfachere Form an:

$$\frac{1}{w_s}\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} = -\frac{1}{R_s^2}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^2 \frac{\left(\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\right)^2}{(M_1^2-1)\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1\right)}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} = -\frac{a_1}{R_s^2}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^3 \frac{\left(\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\right)^2}{M_1(M_1^2-1)}. \tag{43}$$

10. Relative Lage des Stoßfrontscheitels zum Körper. Unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeitsverteilung auf der Symmetrieachse lediglich durch die Geschwindigkeitsverhältnisse und den Gaszustand im Anströmgebiet sowie durch den Scheitelkrümmungsradius der Stoßfront bestimmt ist, kann die Entfernung des Stoßfrontscheitels vom Körper auf der Symmetrieachse wie folgt abgeschätzt werden:

[1] In der Originalarbeit ist die Funktion $L(\varphi, M_1)$ unter Berücksichtigung der Stoßverluste angegeben. Jedoch ist die Funktion nicht tabuliert worden.

Für die Geschwindigkeit w_s auf der Symmetrieachse in der nächsten Umgebung des Stoßfrontscheitels gilt die Entwicklung

$$w_s(x) = w_s(0) + \frac{\partial w_s}{\partial s}\frac{x}{1!} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2}\frac{x^2}{2!} + \cdots ,$$

wenn man den Koordinatenursprung in den Schnittpunkt der Stoßfront mit der Symmetrieachse verlegt.

Bezieht man die Strömungsgeschwindigkeit w_s auf die Schallgeschwindigkeit a_1 des Anströmgebietes, so ergibt sich aus Gleichung (51) des Abschnittes II auf der Symmetrieachse

$$\left(\frac{w_s}{a_1}\right) = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}{M_1}\,, \tag{51a}$$

und man erhält mit den Gleichungen (35) und (43)

$$\left(\frac{w_s}{a_1}\right)_x = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}{M_1} - \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^2 \frac{\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}}{M_1}\,\frac{x}{R_s} - \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^3 \frac{\left(\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\right)^2}{M_1\,(M_1^2-1)}\,\frac{x^2}{2\,R_s^2} + \cdots .$$

Da dem Schnittpunkt der Körperkontur mit der Symmetrieachse ein Staupunkt in der Strömung entspricht, gilt für die Entfernung x_0 der Stoßfront vom Körper

$$\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2 + 1 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\right)\frac{x_0}{R_s} - \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^2 \frac{\left(\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\right)^2}{M_1^2-1}\,\frac{x_0^2}{2\,R_s^2} = 0 .$$

Man erhält nach kurzer Rechnung

$$\frac{x_0}{R_s} = \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{M_1^2-1}{\varkappa M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{2}}\left(\sqrt{1 + 2\,\frac{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2+1}{M_1^2-1}} - 1\right). \tag{44}$$

Die Ergebnisse der Auswertung sind in der Tabelle 5 und in Abb. 5 wiedergegeben[1].

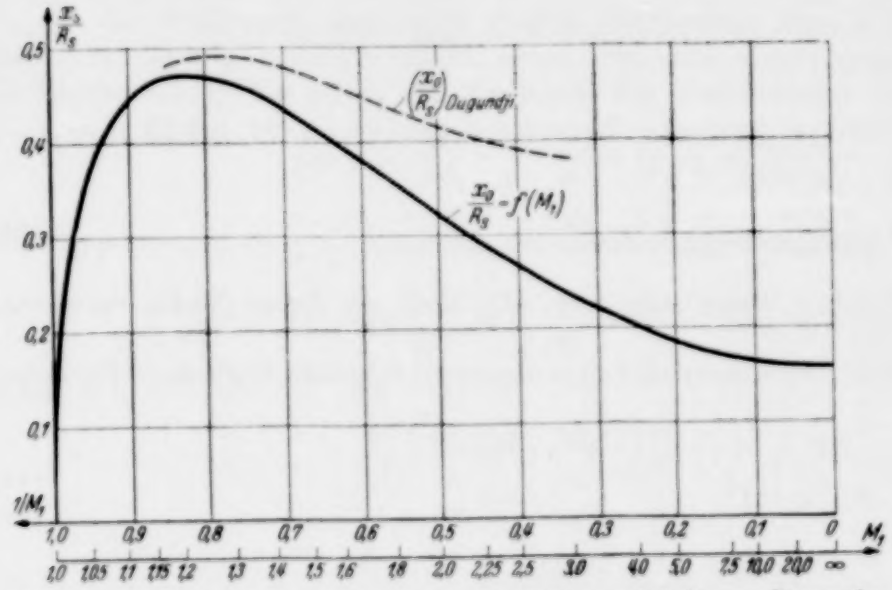

Abb. 5. Verhältnis x_0/R der Entfernung x_0 des Stoßfrontscheitels vom Staupunkt des umströmten Körpers zum Scheitelkrümmungsradius R_s der Stoßfront. Die gestrichelte Kurve entspricht den abweichenden Ergebnissen von *Dugundji*.

11. Zusammenstellung einiger aus den Stoßgleichungen folgenden Beziehungen für den Geschwindigkeitsvektor und die Gaszustandsgrößen. Die Zustandsänderungen im Gas beim Durchschreiten einer Stoßfront können sehr anschaulich mittels des *Busemann*schen Stoßpolarendiagramms und des Druckberges[2] dargestellt werden. Der formelmäßige Zusammenhang zwischen den einzelnen physikalischen und geometrischen Größen ist in übersichtlicher Weise bei *F. Schubert*[3] angegeben.

Man erhält mit den in der Arbeit von *Schubert* angegebenen Beziehungen, wenn man an Stelle der Stoßfrontneigung γ den Komplementwinkel $\varphi = 90 - \gamma$ einführt, folgende Ausdrücke für

[1] Bei Umrechnung der Ergebnisse von *J. Dugundji* erhält man für den zweiten Differentialquotienten der Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse ein gegenüber hier abweichendes Ergebnis. Demzufolge ergeben sich auch für die Entfernung x_0 des Stoßfrontscheitels vom Staupunkt andere Werte, für große Machsche Zahlen der Anströmung sogar überhaupt keine reellen Werte (vgl. Auftragung in Abb. 6). Eine Nachprüfung der von *Dugundji* abgeleiteten Beziehung ist schwierig, da ein Teil der Zwischenrechnung weggelassen ist.

[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 211.

[3] Vgl. Fußnote 1 von S. 208.

1. den auf den Druck im Anströmgebiet p_1 bezogenen Druck p:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} M_1^2 \cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = \frac{2}{\varkappa+1}\left(\varkappa M_1^2 \cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}\right), \tag{45}$$

2. die auf die Dichte im Anströmgebiet ϱ_1 bezogene Dichte ϱ:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi}{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1}, \tag{46}$$

3. die auf die Temperatur im Anströmgebiet T_1 bezogene Temperatur T:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1\right) \frac{\varkappa M_1^2 \cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}}{\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2 M_1^2 \cos^2\varphi}, \tag{47}$$

4. den Ablenkungswinkel δ der Stromlinien hinter der Stoßfront:

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\left[M_1^2 - \frac{2}{\varkappa+1}(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\right]\frac{1}{M_1}}{\frac{2}{\varkappa+1}(M_1^2\cos^2\varphi - 1)\frac{1}{M_1}\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2}{M_1^2\cos^2\varphi - 1} - 1\right), \tag{48}$$

5. den Drosselfaktor K:

$$K = \frac{p_R}{p_{R_1}} = \left(\frac{\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2\cos^2\varphi}{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \left(\frac{\frac{\varkappa+1}{2}}{\varkappa M_1^2\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}. \tag{49}$$

Tabelle 5. *Relative Lage des Stoßfrontscheitels zum Körper (Gl. 44) sowie Zahlenwerte* der Gleichungen (51a), (35), (42), (44).*

Anström-Machzahl M_1	Gl. (51a)	Gl. (35)	Gl. (42)	(Gl. 44)
	Geschwindigkeit	Geschwindigkeitsgradient	Gradient der Geschwindigkeitsänderung	Relative Lage des Stoßfrontscheitels
	w_s/a_1	$\frac{1}{w_s}\cdot\frac{\partial w_s}{\partial s}R_s$	$\frac{1}{w_s}\cdot\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2}R_s^2$	$\frac{x_0}{R_s}$
1,0	1,00	—0,83160	—	—
1,05	0,96882	—0,91539	—10,0002	0,36374
1,10	0,94124	—1,00027	— 5,9319	0,43602
1,15	0,91627	—1,08598	— 4,6362	0,46308
1,2	0,89508	—1,17226	— 4,0339	0,47114
1,3	0,85861	—1,34567	— 3,5225	0,46280
1,4	0,82976	—1,51884	— 3,3567	0,44226
1,5	0,80700	—1,69034	— 3,3273	0,41805
1,6	0,78919	—1,85900	— 3,3637	0,39603
1,8	0,76512	—2,18418	— 3,5271	0,35569
2,0	0,75260	—2,48906	— 3,7379	0,32384
2,25	0,74850	—2,83762	— 4,1140	0,29207
2,5	0,75364	—3,14884	— 4,2788	0,26857
2,75	0,76550	—3,42403	— 4,5224	0,25059
3,0	0,78240	—3,66597	— 4,7416	0,23658
3,5	0,82700	—4,06378	— 5,1093	0,21659
4,0	0,88150	—4,36934	— 5,3964	0,20334
5,0	1,00832	—4,79036	— 5,7967	0,18749
7,5	1,37387	—5,29062	— 6,2773	0,17155
10,0	1,76715	—5,43043	— 6,4705	0,16592
20,0	3,40956	—5,69746	— 6,6712	
∞				0,158616

* Bei der Ermittlung der Zahlenwerte wurde mit $\varkappa = 1{,}405$ gerechnet.

Mit diesen Gleichungen können also bei vorgegebener Machzahl der Anströmung M_1 die Ablenkung δ sowie die einzelnen Zustandsgrößen des Gases unmittelbar hinter der Stoßfront für jede Stoßfrontneigung

$$\gamma (\gamma = 90 - \varphi)$$

leicht bestimmt werden.

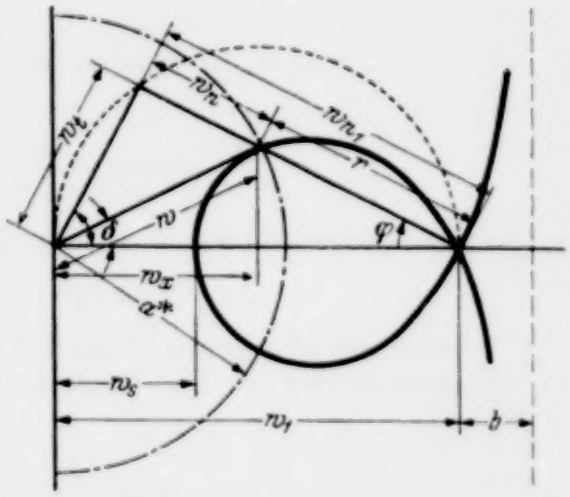

Abb. 6. Stoßpolare nach *Busemann*.

Weiterhin erhält man aus den Gleichungen (45) und (46) für die auf die Schallgeschwindigkeit im Anströmgebiet a_1 bezogene lokale Schallgeschwindigkeit a die Beziehung

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{\frac{\varkappa+1}{2} M_1 \cos\varphi} \sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2\cos^2\varphi + 1\right)\left(\varkappa M_1^2\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{2}\right)}. \tag{50}$$

Berücksichtigt man, daß für eine durch die Stoßfront hindurchgehende Stromlinie die normal zur Stoßfront verlaufenden Komponenten w_{n_1} und w_n der Geschwindigkeitsvektoren vor und hinter der Stoßfront der Beziehung[1]

$$\frac{w_n}{w_{n_1}} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

genügen müssen, so folgt mit Gleichung (46) für die Strömungsgeschwindigkeit w unmittelbar hinter der Stoßfront

$$w^2 = w_t^2 + w_n^2 = w_1^2 \sin^2\varphi - w_1^2 \cos^2\varphi \left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^2 = w_1^2 \sin^2\varphi - w_1^2 \cos^2\varphi \frac{\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1\right)^2}{\left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi\right)^2}.$$

Bezieht man die Strömungsgeschwindigkeit w auf die Schallgeschwindigkeit im Anströmgebiet a_1 und berücksichtigt dabei, daß $w_1/a_1 = M_1$ ist, so erhält man für die Strömungsgeschwindigkeit w/a_1

$$\frac{w}{a_1} = \frac{1}{\frac{\varkappa+1}{2} M_1 \cos\varphi} \sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos\varphi \sin\varphi\right)^2} \tag{51}$$

sowie für die beiden w-Komponenten in Normal- bzw. Tangentialrichtung

$$\frac{w_n}{a_1} = \frac{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1}{\frac{\varkappa+1}{2} M_1 \cos\varphi}, \tag{52}$$

$$\frac{w_t}{a_1} = M_1 \sin\varphi \tag{53}$$

bzw. in x- und y-Richtung

$$\frac{w_x}{a_1} = \frac{M_1^2 \cos^2\varphi - 1}{\frac{\varkappa+1}{2} M_1 \cos\varphi} \sin\varphi = \frac{2}{\varkappa+1} \operatorname{tg}\varphi \left(M_1^2 \cos^2\varphi - 1\right) \frac{1}{M_1}, \tag{54}$$

$$\frac{w_y}{a_1} = \left[M_1^2 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(M_1 \cos^2\varphi - 1\right)\right] \frac{1}{M_1}. \tag{55}$$

Berücksichtigt man, daß für den Leitstrahl r der *Busemann*schen Stoßpolaren (vgl. Abb. 6) mit (46) und $M_1 = w_1/a_1$

$$\left.\begin{aligned} r = w_{n_1} - w_n &= w_1 \cos\varphi - w_1 \cos\varphi \frac{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1}{\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi} \\ &= \frac{2}{\varkappa+1} w_1 \cos\varphi - \frac{2}{\varkappa+1} \frac{w_1 \cos\varphi}{M_1^2 \cos^2\varphi} = \frac{2}{\varkappa+1}\left(w_1 \cos\varphi - \frac{a_1^2}{w_1 \cos\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

geschrieben werden kann, so gilt für die Strömungsgeschwindigkeit w

$$w = \sqrt{(r \sin\varphi)^2 + (w_1 - r\cos\varphi)^2} = \sqrt{w_1^2 + r^2 - 2 r w_1 \cos\varphi}. \tag{57}$$

Anschließend werden einige bei der Rechnung oft benutzten Ausdrücke, die sich aus den Gleichungen (45) bis (55) leicht herleiten lassen, übersichtlich zusammengestellt. Es ist (vgl. Abb. 5)

$$\sin(\varphi + \delta) = \frac{w_1 \sin\varphi}{w} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2} M_1^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2 M_1^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}}, \tag{58}$$

$$\cos(\varphi + \delta) = \frac{w_n}{w} = \frac{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1}{\sqrt{\left(\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 \cos^2\varphi + 1\right)^2 + \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2 M_1^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}}, \tag{59}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 S. 211.

$$\operatorname{tg}(\varphi+\delta)=\frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi}{\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1}. \tag{60}$$

Der Ablenkungswinkel δ wird

$$\delta=\operatorname{arc\,ctg}\left[\frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2-M_1^2\cos^2\varphi+1}{M_1^2\cos^2\varphi-1}\operatorname{ctg}\varphi\right],$$

daraus

$$\frac{d\delta}{dp}=\frac{\varkappa M_1^4\cos^4\varphi-\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi+2M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2-1}{\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^2M_1^4\cos^2\varphi-\varkappa M_1^4\cos^4\varphi+(\varkappa-1)M_1^2\cos^2\varphi+1}. \tag{61}$$

Die örtliche *Mach*sche Zahl M hinter der Stoßfront ist

$$M^2=\frac{w^2}{a^2}=\frac{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)^2+\left(\frac{\varkappa+1}{2}M_1^2\cos\varphi\sin\varphi\right)^2}{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)\left(\varkappa M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa-1}{2}\right)}, \tag{62}$$

daraus

$$M^2-1=\frac{\varkappa+1}{2}\frac{\frac{\varkappa+1}{2}M_1^4\cos^2\varphi-\varkappa M_1^4\cos^4\varphi-\frac{3-\varkappa}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1}{\left(\frac{\varkappa-1}{2}M_1^2\cos^2\varphi+1\right)\left(\varkappa M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa-1}{2}\right)}. \tag{63}$$

Aus Gleichung (45) erhält man ferner

$$\frac{d\ln p}{d\varphi}=\frac{p_1}{p}\frac{d\frac{p}{p_1}}{d\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi\frac{2\varkappa M_1^2\cos^2\varphi}{\varkappa M_1^2\cos^2\varphi-\frac{\varkappa-1}{2}}. \tag{64}$$

Die Winkel sind in Neugrad gemessen, daher ist $\gamma^g=100-\varphi^g$.

Eingegangen am 4. November 1950.

Anschrift des Verfassers: *Harald Melkus*, Wright-Field MCJ-AXF Dayton Ohio USA.

Membrantheorie verallgemeinerter Rotationsschalen.

Von **W. Zerna.**

1. Einleitung. Die Bestimmung des Membranspannungszustandes beliebiger Schalen läßt sich auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Spannungsfunktion zurückzuführen, aus der dann die Schnittkräfte als zweite Differentialquotienten folgen[1]. In vielen Fällen ist die Berechnung von Membranschalen auf diesem Wege jedoch nur schwerlich durchführbar, da sich die Randbedingungen für die Spannungsfunktion nicht immer ohne weiteres angeben lassen, und außerdem erscheint der Umweg über eine Spannungsfunktion, die selbst ja gar nicht interessiert, sondern nur ihre zweiten Ableitungen, unzweckmäßig, insbesondere im Hinblick auf die Anwendung von Näherungsrechnungen, wie z. B. das Differenzenverfahren, auf die bei allen nicht ganz einfachen Problemen zurückgegriffen werden muß.

Für eine spezielle Flächenklasse, die aber eine große Mannigfaltigkeit verschiedenster Flächen enthält und verallgemeinerte Rotationsflächen genannt werden möge, soll im folgenden ein Lösungsweg angegeben werden, der die Einführung einer Spannungsfunktion vermeidet und für die praktische Rechnung besonders geeignet erscheint.

2. Geometrische Beziehungen. Es werde ausgegangen von einer ebenen Kurve K, deren Ortsvektor $\mathfrak{a}$ sich in einem durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2$ festgelegten kartesischen Koordinatensystem x, y mittels

$$\mathfrak{a} = x(\vartheta)\,\mathfrak{i}_1 + y(\vartheta)\,\mathfrak{i}_2 \qquad (1)$$

darstellen läßt, wenn ϑ einen Parameter bezeichnet. In jedem Punkt von K werde nun ein Vektor

$$r\mathfrak{k} = r(\vartheta)\,[\xi(\varphi)\,\mathfrak{i}_3 + \eta(\varphi)\,\mathfrak{i}_2] \qquad (2)$$

abgetragen, worin $r(\vartheta)$ eine beliebige Funktion des Parameters ϑ, sowie $\xi(\varphi)$, $\eta(\varphi)$ beliebige Funktionen eines zweiten Parameters φ und $\mathfrak{i}_3$ einen auf $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ senkrecht stehenden Einheitsvektor bezeichnet.

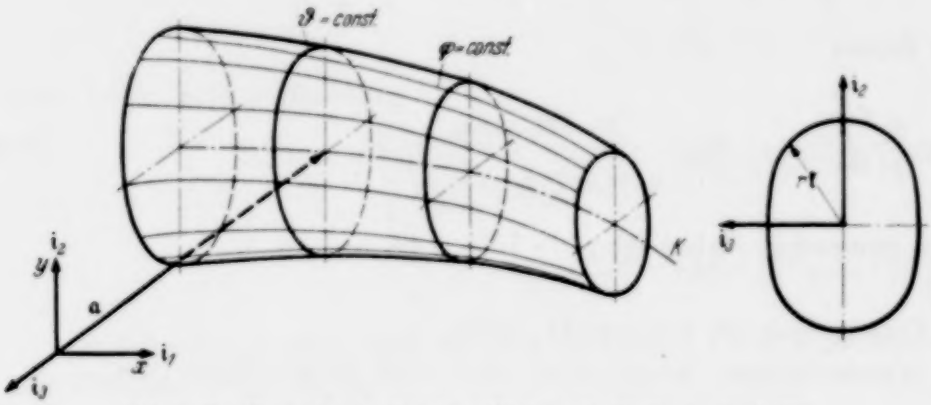

Abb. 1. Verallgemeinerte Rotationsfläche mit Breitenkreisschnitt.

Durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}(\vartheta) + r(\vartheta)\,\mathfrak{k}(\varphi) \qquad (3)$$

ist dann eine Fläche bestimmt (Abb. 1).

Wird die Kurve K als Gerade gewählt und beschreibt $r\mathfrak{k}$ Kreise, deren Ebenen senkrecht zu K stehen, so geht die Fläche in eine Rotationsfläche über. Es werde deshalb die durch (3) dargestellte Fläche verallgemeinerte Rotationsfläche genannt. Die Kurven $\vartheta = \text{const.}$ entsprechen den Breitenkreisen und die Kurven $\varphi = \text{konst.}$ den Meridianen.

Für $r = \text{const.}$ ergibt sich eine Translationsfläche mit K als Erzeugende. Ist K eine beliebige Gerade, so lassen sich Kegelflächen gewinnen, wie überhaupt die meisten praktisch interessierenden Flächen erfaßt sind, was sich leicht einsehen läßt.

Ableitungen nach ϑ werden durch einen Strich, Ableitungen nach φ durch einen Punkt angezeigt.

Die Basisvektoren der Fläche folgen aus (1) bis (3) zu

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{r}' = x'\,\mathfrak{i}_1 + y'\,\mathfrak{i}_2 + r'\mathfrak{k}\,, \qquad (4)$$

$$\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{r}^{\cdot} = r\mathfrak{i}\,, \qquad (5)$$

wenn

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{k}^{\cdot} = \xi^{\cdot}\,\mathfrak{i}_3 + \eta^{\cdot}\,\mathfrak{i}_2\,. \qquad (6)$$

---

[1] Vgl. *A. Pucher*, Beton u. Eisen. 33 (1934), S. 298.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ lassen sich durch $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$ ausdrücken: es ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{i}_2 &= \frac{1}{D}\,(\xi\,\mathfrak{i} - \xi^{\cdot}\,\mathfrak{k})\,, \\ \mathfrak{i}_3 &= \frac{1}{D}\,(-\eta\,\mathfrak{i} + \eta^{\cdot}\,\mathfrak{k}) \end{aligned}\right| \tag{7}$$

mit

$$D = \xi\eta^{\cdot} - \xi^{\cdot}\eta\,. \tag{8}$$

Mit (7) wird aus (4)

$$\mathfrak{e}_1 = x'\,\mathfrak{i}_1 + y'\,\frac{\xi}{D}\,\mathfrak{i} + \left(r' - y'\,\frac{\xi^{\cdot}}{D}\right)\mathfrak{k}\,. \tag{9}$$

Die Ableitungen der Basisvektoren werden nun auf $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}, \mathfrak{k}$ bezogen. Es ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_1' &= x''\,\mathfrak{i}_1 + y''\,\frac{\xi}{D}\,\mathfrak{i} + \left(r'' - y''\,\frac{\xi^{\cdot}}{D}\right)\mathfrak{k}\,, \\ \mathfrak{e}_1^{\cdot} &= \mathfrak{e}_2' = r'\,\mathfrak{i}\,, \\ \mathfrak{e}_2^{\cdot} &= \frac{r}{D}\,(D^{\cdot}\,\mathfrak{i} + H\mathfrak{k})\,, \end{aligned}\right| \tag{10}$$

mit

$$H = \xi^{\cdot\cdot}\eta^{\cdot} - \xi^{\cdot}\eta^{\cdot\cdot}\,. \tag{11}$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche (die Komponenten des Maßtensors) errechnen sich aus (5) und (9), wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= \mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_1 = x'^2 + y'^2 + r'^2(\xi^2 + \eta^2) + 2\,r'\,y'\,\eta\,, \\ g_{22} &= \mathfrak{e}_2\cdot\mathfrak{e}_2 = r^2(\xi^{\cdot 2} + \eta^{\cdot 2})\,, \\ g_{12} &= \mathfrak{e}_1\cdot\mathfrak{e}_2 = r r'(\xi\xi^{\cdot} + \eta\eta^{\cdot}) + r y'\eta^{\cdot}\,. \end{aligned}\right| \tag{12}$$

Die Determinante des Maßtensors ergibt sich damit zu

$$\left.\begin{aligned} g &= |g_{ik}| = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2\,, \\ \frac{g}{r^2} &= (\xi^{\cdot 2} + \eta^{\cdot 2})\,[x'^2 + y'^2 + 2\,r'\,y'\eta + r'^2(\xi^2 + \eta^2)] - \\ &\quad - r'\,(\xi\xi^{\cdot} + \eta\eta^{\cdot})\,[2\,y'\eta^{\cdot} + r'\,(\xi\xi^{\cdot} + \eta\eta^{\cdot})] - (y'\eta^{\cdot})^2\,. \end{aligned}\right| \tag{13}$$

3. Gleichgewichtsbedingungen. Die Längskräfte mögen mit N_ϑ und N_φ, die Schubkräfte mit T bezeichnet werden. Die Belastung der Schale sei durch den Belastungsvektor in der Form

$$\mathfrak{p} = p_x\,\mathfrak{i}_1 + p_\varphi\,\mathfrak{i} + p_r\,\mathfrak{k} \tag{14}$$

gegeben. Es werden reduzierte Längskräfte und Belastungskomponenten eingeführt, indem gesetzt wird

$$\bar{N}_\vartheta = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\,N_\vartheta\,, \qquad \bar{N}_\varphi = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\,N_\varphi\,, \tag{15}$$

$$\bar{p}_x = \sqrt{g}\,p_x\,, \qquad \bar{p}_\varphi = \sqrt{g}\,p_\varphi\,, \qquad \bar{p}_r = \sqrt{g}\,p_r\,. \tag{16}$$

Mit Verwendung der definierten reduzierten Größen lassen sich die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie in der Form darstellen[1]

$$\mathfrak{e}_1(\bar{N}_\vartheta' + T^{\cdot}) + \mathfrak{e}_2(T' + \bar{N}_\varphi^{\cdot}) + \mathfrak{e}_1'\bar{N}_\vartheta + 2\,\mathfrak{e}_2'\,T + \mathfrak{e}_2^{\cdot}\bar{N}_\varphi + \mathfrak{p}\sqrt{g} = 0\,.$$

Einführung von (5), (9), (10), (16) liefert die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\bar{N}_\vartheta' + T^{\cdot} + \frac{x''}{x'}\,\bar{N}_\vartheta + \frac{\bar{p}_x}{x'} = 0\,, \\ &T' + \bar{N}_\varphi^{\cdot} + \frac{2\,r'}{r}\,T + \frac{D^{\cdot}}{D}\,\bar{N}_\varphi + \frac{\xi}{D}\,f\bar{N}_\vartheta + P_1 = 0\,, \\ &\bar{N}_\varphi + G\,\bar{N}_\vartheta + P_2 = 0\,. \end{aligned}\right| \tag{17}$$

[1] Vgl. *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 149.

Darin bedeuten

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{r}\left(y'' - y'\frac{x''}{x'}\right), \\ G &= \frac{D}{H}\left(\frac{r''}{r} - \frac{x''}{x'}\frac{r'}{r}\right) - \frac{\xi'}{H} f, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{r}\left(\bar{p}_\varphi - \frac{y'}{x'}\frac{\xi}{D}\bar{p}_x\right), \\ P_2 &= \frac{D}{Hr}\left[\bar{p}_r - \left(r' - y'\frac{\xi'}{D}\right)\frac{\bar{p}_x}{x'}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

In den Gleichungen (17) sind als Sonderfall die Gleichgewichtsbedingungen der Rotationsschale in der vom Verfasser[1] angegebenen Form enthalten.

4. Differentialgleichung des Problems. Ähnlich wie bei den Rotationsschalen lassen sich die drei Gleichgewichtsbedingungen (17) auf eine einzige Differentialgleichung zurückführen. Zu diesem Zweck werden aus den ersten beiden Gleichungen die Ableitungen der Schubkräfte eliminiert. Wird dann aus der ersten und letzten Gleichung

$$T' = -\bar{N}_\vartheta' - \frac{x''}{x'}\bar{N}_\vartheta - \frac{\bar{p}_x}{x'}, \tag{20}$$

$$\bar{N}_\varphi = -G\bar{N}_\vartheta - P_2 \tag{21}$$

berücksichtigt und zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{x''}{x'} + \frac{2r'}{r}, \\ F &= G' + \frac{D'}{D}G - f\frac{\xi}{D}, \\ U &= F' + \left(\frac{x''}{x'}\right)' + \frac{2r'}{r}\frac{x''}{x'}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$q = P_2'' - P_1' + \frac{D'}{D}P_2' + \left(\frac{D'}{D}\right)' P_2 + \frac{2r'}{r}\frac{\bar{p}_x}{x'} + \left(\frac{\bar{p}_x}{x'}\right)', \tag{23}$$

so folgt

$$\bar{N}_\vartheta'' + b\bar{N}_\vartheta' + G\bar{N}_\vartheta'' + (G' + F)\bar{N}_\vartheta' + U\bar{N}_\vartheta + q = 0. \tag{24}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die reduzierte Schnittkraft $\bar{N}_\vartheta$. Ist sie gefunden, so folgen die Schubkräfte T aus (20) und $\bar{N}_\varphi$ aus (21).

Die Differentialgleichung (24) läßt sich noch etwas vereinfachen. Einführung von

$$\Phi = r\sqrt{x'}\,\bar{N}_\vartheta \tag{25}$$

und

$$\bar{q} = -r\sqrt{x'}\,q, \tag{26}$$

$$J = F' + \frac{x'''}{2x'} + \frac{x''}{x'}\frac{r'}{r} - \frac{3}{4}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 - \frac{r''}{r} \tag{27}$$

bringt

$$\Phi'' + G\Phi'' + (G' + F)\Phi' + J\Phi = \bar{q}, \tag{28}$$

womit die das hier betrachtete Problem beschreibende Differentialgleichung gefunden ist.

Sind am Rande der Schale die Längskräfte $\bar{N}_\varphi$ oder $\bar{N}_\vartheta$ vorgeschrieben, wie dies meistens der Fall ist, so sind bei Beachtung von (25), sowie der letzten Gleichung (17) auch sofort die Randwerte von Φ bekannt. Damit läßt sich dann (28) mit Hilfe von Näherungsrechnungen wie z. B. das Differenzenverfahren ohne Schwierigkeiten behandeln.

(Eingegangen am 30. November 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Zerna*, Hannover, Technische Hochschule.

[1] Vgl. *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 223.

Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde. Von Dr. **Georg Masing**, o. ö. Professor an der Universität Göttingen, Direktor des Instituts für allgemeine Metallkunde Göttingen. Unter Mitwirkung von Dr. **Kurt Lücke**, Assistent am Institut für allgemeine Metallkunde Göttingen. Mit 495 Abbildungen. XV, 620 Seiten. 1950.

DM 56.—; Ganzleinen DM 59.60

Inhaltsübersicht: **Einleitung.** — **Einige allgemeine Grundlagen.** Einige physikalisch-chemische Beziehungen. Einige krystallographische Grundlagen. Röntgenanalyse in der Metallkunde. Thermodynamische Grundlagen. — **Konstitutionslehre (Heterogene Gleichgewichte).** Einstoffsysteme. Zweistoffsysteme. Phasenregel. Dreistoffsysteme. Systeme mit vier und mehr Bestandteilen. Bemerkungen über die Methoden der Konstitutionsforschung. Zur Energetik binärer Systeme. — **Der atomistische Aufbau des metallischen Krystalles.** Intermetallische Krystallarten. Reine Metalle. Mischkrystalle. — **Diffusion.** — **Entstehung des krystallinischen Metallkörpers.** Vorbemerkung. Die Keimbildung. Das Krystallwachstum in der Schmelze. Ergänzungen. Eigenschaftsänderungen bei der Krystallisation. Entstehung des technischen Metallkörpers aus der Schmelze. — **Physikalische Eigenschaften der Metalle.** Das Metallatom. Die spezifische Wärme der Metalle. Volumen und thermische Ausdehnung. Elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit. Magnetische Eigenschaften. Thermoelektrizität. Elastisches Verhalten der Metalle. — **Plastische Verformung.** Makroskopische Beschreibung. Atomistische Theorie der Gleitung und der Verfestigung. Änderungen der physikalischen und chemischen Eigenschaften durch plastische Verformung. Sondererscheinungen. — **Eigenspannungen.** Natur, Entstehung und Wirkung von Eigenspannungen. Messung von Eigenspannungen. — **Erholung und Rekrystallisation.** Definition der Rekrystallisation und der Erholung. Überblick über die Erscheinungen der Rekrystallisation. Erholung. Systematische Erörterung der Teilvorgänge der Rekrystallisation. Einfluß von Verunreinigungen und Legierungszusätzen auf Rekrystallisation und Erholung. Rekrystallisationstexturen. Rekrystallisationsbeobachtungen an nichtmetallischen Stoffen. — **Zustandsänderungen in krystallisierten Metallen.** Allgemeines. Umwandlungen. Aushärtung. — **Chemische Reaktionen der Metalle mit nichtmetallischen Stoffen.** Allgemeines. Angriff der Metalle durch Gase. — **Korrosion in Elektrolyten.** — **Anhang: Einzelne Metalle und Legierungen.** Eisen und einige seiner Legierungen. Kupfer und einige seiner Legierungen. Leichtmetalle und ihre Legierungen. Zink und seine Legierungen. Nickel und seine Legierungen. **Tabelle der wichtigsten physikalischen Eigenschaften der Metalle.** — **Verzeichnis einiger Fachbücher.** — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen:

... Wer das Buch durchgearbeitet hat, wird empfinden, wie sich auf Grund des allgemeinen Wissens das Einzelergebnis vielfach in ein Ganzes einordnet. So ist das Buch ein Wegweiser zu einer allgemeinen wissenschaftlichen Grundlage für die Heranbildung der Jugend, in der es keine Trennung zwischen Leichtmetall-, Schwermetall- und Eisenfachmann gibt. Auch hier verwischen sich die Grenzen, wie sich in der modernen Naturwissenschaft die Grenzen, zwischen den großen Wissenschaftsgebieten der Physik, Chemie und Biologie zu verwischen beginnen. Wenn immer von der Gefahr zunehmenden Spezialistentums infolge der Entwicklung der Naturwissenschaft gesprochen wird, so sollte man diese auf Grund der Entwicklung der Grundwissenschaften sich herausbildenden Zusammenfassungen als großen Gewinn nicht übersehen. Diesen Gewinn veranschaulicht das Buch von Masing; der Metallkundler wird dadurch angeregt, sich immer wieder mit den erforderlichen Grundwissenschaften zu beschäftigen, der Physiker, seine Theorien am Verhalten der Metalle zu überprüfen und sie für das Verständnis der Metallegierungen und zur Schaffung neuer Legierungen nutzbar zu machen ...

Eduard Houdremont in „Stahl und Eisen".

Hochwertiges Gußeisen, (Grauguß) **seine Eigenschaften und die physikalische Metallurgie seiner Herstellung.** Von Dr.-Ing. habil. **Eugen Piwowarsky,** ord. Professor der Eisenhüttenkunde, Direktor des Instituts für allgemeine Metallkunde und das gesamte Gießereiwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 1063 Abbildungen. XII, 1070 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 135.—

Inhaltsübersicht: I. Einleitung. — II. Die konstitutionellen Grundlagen der Eisen-Kohlenstoff-Legierungen. — III. Über molekulare Eigenheiten kohlenstoffhaltiger Lösungen. — IV. Der Einfluß des Siliziums auf die Gleichgewichts- und Graphitisierungsvorgänge. — V. Der Mechanismus der Graphitisierung siliziumhaltigen Gußeisens. — VI. Die strukturelle Beherrschung der metallischen Grundmasse. — VII. Die Primärkristallisation des Gußeisens. — VIII. Der Einfluß der ständigen Eisenbegleiter. — IX. Der Einfluß der Gase. — X. Technologische Eigenschaften flüssiger und erstarrender Eisen-Kohlenstoff-Legierungen. — XI. Die mechanischen und elastischen Eigenschaften des Gußeisens. — XII. Die physikalischen Eigenschaften des Gußeisens. — XIII. Verhalten des Gußeisens bei hohen und tiefen Temperaturen. — XIV. Technologische Eigenschaften des festen Gußeisens. — XV. Die chemischen Eigenschaften des Gußeisens. — XVI. Der zusätzliche Oberflächenschutz von Gußeisen. — XVII. Festigkeitseigenschaften von Grauguß und Temperguß nach Vorkorrosion. — XVIII. Der Einfluß thermischer Nachbehandlungen auf die Gefügeänderungen und die Eigenschaften perlitischer Grundmassen (Härtungs- und Glühprozesse). — XIX. Legiertes Gußeisen. — XX. Die spanlose Verformung des Gußeisens. — XXI. Das Schweißen von Gußeisen. — XXII. Fehlerquellen bei der Gefügeuntersuchung von Gußeisen. — XXIII. Das Schmelzen von Gußeisen im Kupolofen. — XXIV. Andere Schmelzöfen. — XXV. Einige besonders wichtige Anwendungsgebiete für Gußeisen. — XXVI. Gießen und Schweißen. — XXVII. Anhang. — Sachverzeichnis.

Das einschlägige in- und ausländische Schrifttum, dessen Studium dem Fachmann ein abgerundetes Bild vom Stand der Technik hinsichtlich Herstellung, Eigenschaften und Einsatzmöglichkeiten des heutigen hochwertigen Gußeisens zu vermitteln vermag, ist so überaus umfangreich geworden, daß nur wenige Fachleute Zeit und Muße finden dürften, davon in vollem Umfange Gebrauch zu machen. Hier setzt der Zweck des vorliegenden Werkes ein. Es soll dem Fachmann in geschlossener Buchform einen Überblick bringen über die Metallurgie des Gußeisens, über die Beziehungen zwischen dem Gefügebau und den Eigenschaften desselben sowie über den zweckmäßigen Einsatz dieses Werkstoffes und seine künftigen Entwicklungsmöglichkeiten. Die Darstellung und kritische Betrachtung des Fachgebietes erfolgte in einer Form, die den Leser immer wieder auf offene Probleme hinweist und ihn immer wieder zu eigenem produktiven Denken anregt, um auf diese Weise der weiteren Entwicklung dieses Werkstoffes zu dienen.

Über die erste, 1942 erschienene Auflage schrieb die Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure:

„Es ist ein Verdienst Piwowarskys, daß er mit dem vorliegenden Werk eine sehr umfassende, auf den letzten Stand gebrachte, kritisch würdigende und zur weiteren Mitarbeit anregende Zusammenfassung des gesamten Wissensgebietes gibt, das sich bislang in zahllosen Einzelveröffentlichungen zerstreut fand."

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Das Elektrostahlverfahren. Ofenbau, Elektrotechnik, Metallurgie und Wirtschaftliches. Nach F. T. Sisco „The Manufacture of Electric Steel". Zweite deutsche, erweiterte Auflage. Von Dr.-Ing. **Heinz Siegel,** Düsseldorf-Oberkassel. Mit 140 Abbildungen. XI, 432 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 31.50

Inhaltsübersicht: **A. Einführende Betrachtungen:** Die Entwicklung des Elektrostahlverfahrens. Die Lichtbogenöfen. Die Induktionsöfen. — **B. Der Lichtbogenofen:** Die bauliche Gestaltung der Lichtbogenöfen. Die elektrische Ausrüstung der Lichtbogenöfen. Die Elektroden. Die Energiewirtschaft der Elektrostahlöfen. — **C. Der kernlose Induktionsofen.** — **D. Verschiedene Öfen.** — **E. Gesichtspunkte für den Bau neuer Elektrostahlwerke.** — **F. Die feuerfesten Baustoffe für den Elektrostahlofen.** — **G. Die Einsatzstoffe und die Schlackenbildner.** — **H. Die Metallurgie des Lichtbogenofens:** Die allgemeine Schmelzungsführung bei festem Einsatz. Die Kochvorgänge beim basischen Verfahren. Die Feinungsvorgänge beim basischen Verfahren. Die Abarten des Einschmelzens. Die Abarten des Kochens. Der Betrieb bei flüssigem Einsatz. Die Besonderheiten bei der Herstellung einzelner Stahlsorten. Saurer Elektrostahl. — **J. Die Metallurgie des kernlosen Induktionsofens.** — **K. Gegenüberstellung des Betriebes der Lichtbogenöfen und der kernlosen Induktionsöfen. Weitere Entwicklung.** — **L. Selbstkostenwesen im Elektrostahlbetrieb.** — Sachverzeichnis.

Der „Sisco-Kriz", die erste Darstellung des Elektrostahlverfahrens in deutscher Sprache, geht zurück auf das Buch „The Manufacture of Electric Steel" von F. T. Sisco, das den Vorzug hatte, erstmalig den vorliegenden Gegenstand in außerordentlich glücklicher Weise zu behandeln, weshalb damals die stoffliche Gliederung und die Betrachtungsweise in die deutsche Bearbeitung übernommen worden sind. Da auch heute noch die angewandte Art der Darstellung als vorbildlich bezeichnet werden kann, so wurde sie auch in der Neuauflage beibehalten. Neue Ergebnisse und Erfahrungen mußten allerdings auch in anderer Form zur Darstellung kommen. Da Dr. Siegel in dem von Dr. Kriz ausgerichteten Betrieb lange Jahre tätig gewesen ist, war es ihm möglich, die erforderliche Neubearbeitung vorzunehmen. So gibt das Buch auch in der zweiten Auflage einen klaren und einfachen Überblick über das gesamte Betriebsverfahren und ist im übrigen so abgestimmt, daß es auch dem reinen Praktiker etwas bedeuten wird. Nach wie vor bleibt es das Ziel des Buches, den Leser zu unterrichten, in welcher Weise einwandfreier Elektrostahl wirtschaftlich erschmolzen werden kann.

Der Niederfrequenzofen wurde ausführlich behandelt, obwohl er heute nicht mehr überall anzutreffen ist. Es wurde dabei einmal von dem Gesichtspunkt ausgegangen, daß gerade in letzter Zeit Induktionsöfen mit niedrigen Frequenzen erprobt worden sind und es also nicht ausgeschlossen ist, daß der Niederfrequenzofen in der einen oder anderen Form wieder auflebt. Ferner sind aber auch die gesammelten Erfahrungen zu wertvoll, als daß man sie schon heute vergessen sollte, zumal in Qualitätswerken von Ruf in Europa und Amerika immer noch Niederfrequenzöfen zur vollsten Zufriedenheit arbeiten. Aus ähnlichen Gründen wurde auch die Bodenbeheizung der Lichtbogenöfen noch erwähnt.

Einführung in die Probleme des elektrischen Lichtbogen- und Widerstandsofens. Von Dr.-Ing. **Erich Kluss.** Mit 163 Abbildungen. VII, 263 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 28.50

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Der elektrische Stromkreis. Das Kreisdiagramm. — Die Induktivität. Der induktive Widerstand. — Das magnetische Feld der Ströme. — Die Stromverdrängung. Wirbelströme. — Kontaktprobleme. — Die elektrischen Verhältnisse im Ofen. — Unsymmetrieprobleme. — Transformatoren. — Nichtstationäre Betriebszustände. Ausgleichvorgänge. — Schrifttum. Sachverzeichnis.

Der elektrische Ofen gehört in immer steigendem Maße zu den Großverbrauchern an elektrischer Energie. In ihm wird die zugeführte Energie in thermische bzw. chemische umgesetzt. Die Umsetzung erfolgt bei relativ geringen Spannungen mit entsprechend hohen Strömen, die bei Großöfen in der Größenordnung von 100 000 A liegen. Die zweckentsprechende Fortleitung dieser hohen Wechselströme zum Ofen, die durch ihre Wechselfelder bedingten Erscheinungen der Induktion, Wirbelströme, Stromverdrängungseffekte bilden die Kernprobleme für den Bau und Betrieb derartiger Öfen. Sie werden hier ausführlich behandelt. Darüber hinaus werden die elektrischen Vorgänge im Lichtbogen bei Lichtbogenöfen, sowie die Verhältnisse im Strömungsfeld bei Widerstandsöfen gebracht. Beim Betrieb von Drehstromöfen treten die Probleme der Unsymmetrie auf, wie z. B. die Erscheinungen der „toten" und „scharfen" Phase. Sie werden hier rechnerisch ausführlich behandelt. Größte Bedeutung für den Betrieb des Ofens gewinnt der Ofentransformator, Ersatzschaltungen desselben, sowie bei Großöfen der Regeltransformator. Es ist deshalb hier den Ausführungen über den Transformator und seine Verwendung ein breiter Raum gelassen. Zum Schluß werden die nichtstationären Vorgänge im Ofenbetrieb, Schaltvorgänge und ihre Auswirkungen, die im Betrieb schon öfter unliebsame Überraschungen brachten, behandelt.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen drei Prospekte des Springer-Verlages / Berlin · Göttingen · Heidelberg bei

Springer-Verlag / Berlin·Göttingen·Heidelberg. Printed in Germany. R/V/12/7 0,8 K. B./Z. 040